

حل عددی معادله ریچاردز در جریان غیر اشباع با استفاده از روش حجم محدود

محمد عزیزی پور^{۱*} و محمد محمودیان شوشتری^۲

* نویسنده مسئول: دانشجوی سابق کارشناسی ارشد عمران آب دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران

۲- استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۲/۲۳

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۱۲/۲۲

چکیده

بیشرفت رایانه‌ها و روش‌های عددی امکان حل عددی مسائل پیچیده‌تر در محیط‌های متخلخل را با روش‌های جدید میسر ساخته است. در این مقاله از روش عددی حجم محدود برای حل معادله ریچاردز و تعیین رطوبت و بار فشار در خاک غیر اشباع استفاده شده و یک مدل رایانه‌ای تهیه گردیده است. جهت تخمین پارامترهای منحنی رطوبتی خاک، برنامه RETC با این مدل رایانه‌ای هم پیوند شده، و سپس نتایج مدل رایانه‌ای تهیه شده با داده‌های اندازه‌گیری شده آزمایشگاهی مقایسه شده است. نتایج نشان داد که روش حجم محدود، مقادیر بار فشار و رطوبت را به درستی برآورد می‌کند.

کلیدواژه‌ها: خاک غیر اشباع، معادله ریچاردز، حجم محدود، برنامه RETC.

مقدمه

(۱) با استفاده از روش تفاضل محدود یک حل پایستار^۱ برای معادله ریچاردز ارائه نمودند (۱). در این مقاله از روش عددی احجام محدود^۲ برای حل معادله ریچاردز در حالت یک بعدی استفاده شده است.

معادله حاکم

ریچاردز پس از ترکیب قانون داری با قانون بقای جرم و قبول فرضیات ساده کننده، به معادله‌ای دست یافت که حالت کلی جریان در محیط متخلخل غیر اشباع را در بر می‌گیرد. فرم عمومی معادله ریچاردز در حالت سه بعدی به صورت زیر است:

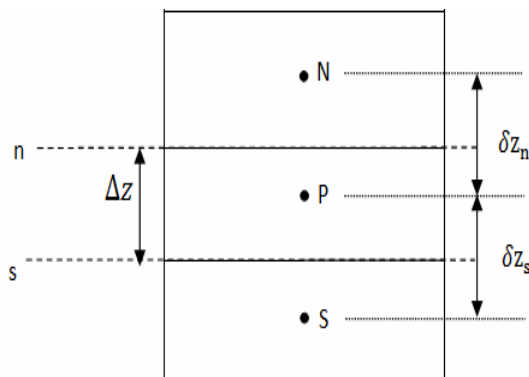
$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} - \nabla \cdot K(\psi) \nabla \psi + \frac{\partial k(\psi)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

که در آن ψ بار فشار [L]، t زمان [T]، z مختصه قائم [L]، θ رطوبت حجمی و $k(\psi)$ هدایت هیدرولیکی به صورت تابعی از ψ [L/T] می‌باشد (۱). برای تخمین مقدار هدایت هیدرولیکی روابط متعددی ارائه شده است. مهمترین روابطی که در حال حاضر مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از روابط گاردنر، بروکز-کری و وان گنوختن (۱۱و۱۲). در این مقاله نیز برای محاسبه هدایت

با رشد روز افزون جمعیت و با توجه به کمبود منابع آب شیرین، نگهداری از منابع آب زیرزمینی به‌عنوان یکی از عمده‌ترین منابع آب شیرین موجود، امری ضروری است. منطقه غیر اشباع به عنوان رابط بین جریان‌های سطحی و منابع آب زیرزمینی نقش کلیدی در تغذیه و مطالعه آب‌های زیرزمینی ایفا می‌کند. به علت پیچیدگی جریان در محیط متخلخل غیر اشباع و همچنین عدم وجود حل‌های تحلیلی کامل برای بررسی جریان در این ناحیه، در دهه‌های اخیر استفاده از مدل‌های رایانه‌ای و عددی برای حل مسائل جریان غیر اشباع رشد چشم‌گیری داشته و هنوز هم یکی از مهمترین موضوعات مورد مطالعه در هیدرولوژی، جریان‌های زیر سطحی می‌باشد. برخی از محققان پس از ساده کردن معادله ریچاردز، حل تحلیلی برای آن ارائه دادند (۱۰و۱۱). جواب حل‌های تحلیلی ارائه شده فقط در حالت‌های ساده با شرایط اولیه و مرزی خاص اعتبار دارد. با توجه به اینکه معادله ریچاردز غیر خطی است، جهت بررسی جریان غیر اشباع در محیط متخلخل برای حل آن از روش‌های حل عددی استفاده می‌شود. تاکنون روش‌های عددی تفاضل محدود^۱ و المان محدود^۲ برای حل معادله ریچاردز مورد استفاده قرار گرفته است (۷، ۹و۳). در این روش‌ها، غالباً معادله پیوستگی ارضا نمی‌شود (۴). سلیا و بولوتس^۳

- 1- Finite difference
- 2- Finite element
- 3- Celia and Bouloutas

- 4- Mass conservative
- 5- Finite Volume



شکل ۱- نحوه شبکه بندی جریان برای منقطع سازی جمله سمت چپ معادله (۳)

هیدرولیکی از این روابط استفاده و نتایج حاصل از آنها باهم مقایسه شده است.

جریان غالب آب در منطقه غیر اشباع معمولاً به صورت قائم می باشد و بنابراین می توان آن جریان را به صورت یک بعدی شبیه سازی نمود (۸). معادله (۱) در حالت یک بعدی به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \tag{۲}$$

در این مقاله برای شبیه سازی حرکت آب در محیط متخلخل غیر اشباع از معادله (۲) استفاده شده است.

منقطع سازی معادله حاکم با استفاده از روش حجم محدود

برای منقطع سازی معادله (۲)، حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۱) را در نظر بگیرید. اگر از معادله (۲) روی حجم کنترل، نسبت به مکان و زمان انتگرال گیری شود، حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dt dz = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial k}{\partial z} dz dt \tag{۳}$$

از این جمله که مبین تغییرات جرم آب درون حجم کنترل است، نسبت به زمان انتگرال گرفته می شود بنابراین :

$$\int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dt dz = \int_s^n \left(\theta^{t+\Delta t} - \theta^t \right) dz \tag{۴}$$

در روش احجام محدود کلیه خواص سیال و محیط در داخل حجم کنترل ثابت در نظر گرفته می شوند و معمولاً مشخصات یک نقطه از حجم کنترل معرف مشخصات تمام نقاط حجم کنترل است. بنابراین مقدار رطوبت در حجم کنترل ثابت و برابر θ_p در نظر گرفته می شود. اکنون می توان رابطه (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$\int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dt dz = \left(\theta_p^{t+\Delta t} - \theta_p^t \right) \Delta z \tag{۵}$$

جمله اول سمت راست معادله (۳)

این جمله مبین نیروی فشاری است که باعث حرکت سیال می شود. پس از انتگرال گیری این جمله نسبت به مکان و زمان و با توجه به اینکه کمیت های داخل حجم کنترل مقادیر ثابتی هستند، رابطه زیر به دست می آید :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt = \left[\left(k_n^t \frac{\psi_n^* - \psi_p^*}{\delta z_n} \right) - \left(k_s^t \frac{\psi_p^* - \psi_s^*}{\delta z_s} \right) \right] \Delta t \tag{۶}$$

ذکر این نکته ضروری است که در عبارت سمت راست معادله فوق، مقدار هدایت هیدرولیکی در گام زمانی قبل در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه سرعت حرکت آب در محیط متخلخل خیلی کم است، بنابراین رطوبت و در نتیجه هدایت هیدرولیکی در یک گام زمانی تغییر محسوسی نخواهد داشت. در نتیجه استفاده از هدایت هیدرولیکی گام زمانی قبل، یک فرض قابل قبول است.

$$\theta_p^{t+\Delta t, m+1} = \theta_p^{t+\Delta t, m} + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)_p^t (\psi_p^{t+\Delta t, m+1} - \psi_p^{t+\Delta t, m}) + H.O.T \quad (10)$$

که در آن $H.O.T$ به معنی جملات مراتب بالاتر^۲ و بالانویس m مبین شماره تکرار می‌باشد. اکنون اگر معادله (۱۰) در معادله (۹) جایگزین شود و از جملات مراتب بالاتر صرف‌نظر گردد، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$a\psi_N^{t+\Delta t, m+1} + b\psi_p^{t+\Delta t, m+1} + c\Psi_S^{t+\Delta t, m+1} = d \quad (11)$$

که در آن:

$$a = K_n^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right),$$

$$b = -\left[\left(K_n^t + K_s^t\right)\left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right) + C_p^t\right],$$

$$c = K_s^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right) \text{ و}$$

$$d = \left[\left(K_n^t - K_s^t\right)\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right) - C_p^t \psi_p^{t+\Delta t, m} + \left(\theta_p^{t+\Delta t, m} - \theta_p^t\right)\right]$$

شرایط مرزی^۳

شرط مرزی دیرچلت^۴

اگر در مرزهای حوزه جریان، بار هیدرولیکی ثابت باشد، معادله (۱۱) برای مرز بالائی حوزه جریان به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$b\psi_p^{t+\Delta t, m+1} + c\psi_s^{t+\Delta t, m+1} = d \quad (12)$$

که در آن:

$$b = -\left[\left(K_n^t + K_s^t\right)\left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right) + C_p^t\right],$$

جمله دوم سمت راست معادله (۳)

این جمله مبین نیروی ثقل است، به طریق مشابه پس از انتگرال گیری از آن نسبت به زمان و مکان، خواهیم داشت:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial k}{\partial z} dz dt = \left(K_n^t - K_s^t\right) \Delta t \quad (7)$$

در جمله سمت راست معادله اخیر از هدایت هیدرولیکی در گام زمانی قبل استفاده شده است.

اکنون با در نظر گرفتن $t^* = t + \Delta t$ ، $\partial \bar{x}_n = \partial \bar{x}_s = \Delta z$ و قرار دادن عبارات سمت راست روابط (۵)، (۶) و (۷) در معادله (۳)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(\theta_p^{t+\Delta t} - \theta_p^t\right) = \left[K_n^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right)\right] \psi_N^{t+\Delta t} - \left[K_n^t + K_s^t\right] \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right) \psi_p^{t+\Delta t} + \left[K_s^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right)\right] \psi_s^{t+\Delta t} - \left(K_n^t - K_s^t\right) \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (8)$$

با توجه به اینکه در رابطه اخیر مقادیر بار فشار و رطوبت در گام زمانی $t + \Delta t$ مجهول هستند، برای حل رابطه اخیر باید از یک روش تکرار استفاده نمود. با استفاده از روش تکرار پیکارد، معادله (۸) به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$\left(\theta_p^{t+\Delta t, m+1} - \theta_p^t\right) = \left[K_n^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right)\right] \psi_N^{t+\Delta t, m+1} - \left[\left(K_n^t + K_s^t\right)\left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right)\right] \psi_p^{t+\Delta t, m+1} + \left[K_s^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\right)\right] \Psi_S^{t+\Delta t, m+1} - \left(K_n^t - K_s^t\right) \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (9)$$

در معادله (۹) مقادیر رطوبت در نقطه P و بار فشار در نقاط P و N و S ، در گام زمانی $t + \Delta t$ و تکرار $m+1$ مجهول هستند. بنابراین معادله فوق را نمی‌توان به صورت مستقیم حل نمود. برای رفع این مشکل مقدار $\theta_p^{t+\Delta t}$ را با استفاده از سری تیلور^۱ به صورت زیر می‌توان تقریب زد:

2- Higher order terms
3- Boundary condition
4- Dirichlet boundary condition

1- Taylor series

نتایج

در این بخش صحت‌سنجی مدل با دو مثال عددی بررسی می‌شود.

خاک نیو مکزیکو (New Mexico)

در این مسئله توزیع رطوبت در یک ستون از خاک نیو مکزیکو آمریکا بررسی شده است (۸). طول این ستون، ۶۰ سانتی‌متر و دارای رطوبت اولیه‌ی یک‌نواختی تحت مکش ۱۰۰۰- سانتی‌متر می‌باشد. در بالای ستون با افزایش رطوبت، مکشی برابر ۷۵- سانتی‌متر برای کلیه زمان‌ها اعمال گردیده است. بنابراین شرایط اولیه و مرزی حاکم بر این ستون خاک عبارتند از:

$$\text{شرایط مرزی: } \begin{cases} \psi(0, t) = -75 \text{ cm} \\ \psi(60, t) = -1000 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{شرایط اولیه: } \psi(z, 0) = -1000 \text{ cm}$$

پارامترهای هیدرولیکی این نوع خاک به وسیله‌ی روابط منحنی مشخصه رطوبتی و تابع هدایت هیدرولیکی وان‌گونختن (۱۱) بیان گردیده است. این روابط به ترتیب عبارتند از:

$$\theta = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + (a\psi)^n)^m} \quad (16)$$

$$k(\psi) = k_s \frac{\left\{ 1 - (a\psi)^{n-1} [1 + (a\psi)^n]^m \right\}^2}{[1 + (a\psi)^n]^{m/2}}$$

ضرایب و پارامترهای معادله‌های (۱۶) و (۱۷) عبارتند از (۸):

$$\theta_s = 0.368, \theta_r = 0.102, a = 0.0335 \text{ cm}^{-1} \\ k_s = 0.00922 \text{ cm/s}, n = 2, m = 0/5$$

با انتخاب $\Delta z = 1 \text{ cm}$ و $\Delta t = 10 \text{ s}$ ، نیم‌رخ رطوبت و بار فشار پس از گذشت زمان‌های یک ساعت، سه ساعت و پنج ساعت با استفاده از معادله (۱۱) محاسبه شده است. نیم‌رخ بار فشار و رطوبت برای این مسئله، به ترتیب در شکل‌های (۲) و (۳) نمایش داده شده است.

همانطور که در شکل‌های (۲) و (۳) مشاهده می‌گردد، فرم کلی نیم‌رخ رطوبت و بار فشار در زمان‌های مختلف منطقی است. در

$$c = K_s^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \text{ و}$$

$$d = \left[\left(K_n^t - K_s^t \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \right] - C_p^t \psi_p^{t+\Delta t, m} + \\ \left(\theta_p^{t+\Delta t, m} - \theta_p^t \right) - 2K_n^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) \psi_N.$$

برای مرز پائینی حوزه جریان نیز معادله (۱۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$a \psi_N^{t+\Delta t, m+1} + b \psi_p^{t+\Delta t, m+1} = d \quad (13)$$

که در آن:

$$a = K_n^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right),$$

$$b = - \left[\left(K_n^t + K_s^t \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) \right] + C_p^t \text{ و}$$

$$d = \left[\left(K_n^t - K_s^t \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \right] - C_p^t \psi_p^{t+\Delta t, m} \\ + \left(\theta_p^{t+\Delta t, m} - \theta_p^t \right) \\ - 2K_n^t \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) \psi_N.$$

شرط مرزی نیومن^۱

اگر مرز بالائی حوزه جریان دارای شار ثابت باشد، معادله زیر برای آن به‌دست می‌آید:

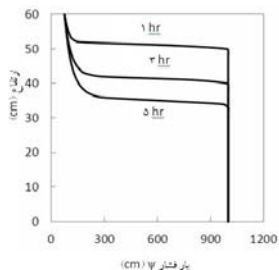
$$\left(\theta_p^{t+\Delta t} - \theta_p^t \right) \Delta z = [q_n \\ - \left(k \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right)_s] \Delta t \quad (14)$$

که در آن q_n مقدار شار ثابت در مرز بالا است. همچنین در صورت ثابت بودن شار در مرز پائین، می‌توان معادله زیر را نوشت:

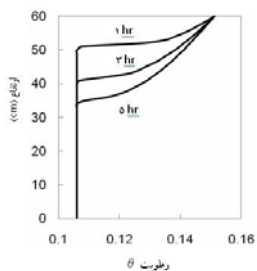
$$\left(\theta_p^{t+\Delta t} - \theta_p^t \right) \Delta z = \left[\left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right)_n \right. \\ \left. - q_s \right] \Delta t \quad (15)$$

می‌شود. در مثال بعدی نتایج حاصل از مدل با داده‌های آزمایشگاهی نیز مقایسه شده‌اند.

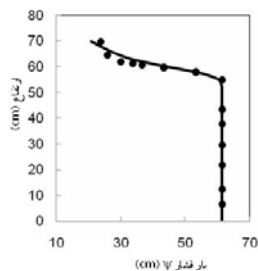
بالا و پائین ستون خاک که بار فشار ثابت نگه داشته شده است، رطوبت نیز دارای مقدار ثابتی است. با گذشت زمان که آب به اعماق پائین نفوذ می‌کند، جبهه رطوبتی نیز به پائین کشیده



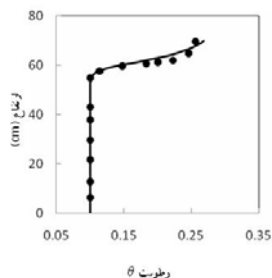
شکل ۲- نیم رخ رطوبت محاسبه شده با معادله (۱۱) برای خاک نیومکزیکو در زمان‌های مختلف



شکل ۳- نیم رخ رطوبت محاسبه شده با معادله (۱۱) برای خاک نیومکزیکو در زمان‌های مختلف



شکل ۴- مقایسه نیم رخ بار فشار محاسبه شده با معادله (۱۱) و داده‌های هاور کمپ و همکاران



شکل ۵- مقایسه نیم رخ رطوبت محاسبه شده با معادله (۱۱) و داده‌های هاور کمپ و همکاران

با انتخاب $\Delta z = 1\text{cm}$ و $\Delta t = 1\text{s}$ ، نیمرخ رطوبت و بار فشار پس از گذشت ۳۶۰ ثانیه، با استفاده از معادله (۱۱) محاسبه شد. نتایج این محاسبه به صورت خط ممتد همراه با داده‌های آزمایشگاهی به صورت (●) در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است. شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب نشان دهنده نیمرخ بار فشار و رطوبت در طول ستون خاک هستند. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، نتایج حاصل از حل روش عددی و داده‌های آزمایشگاهی مطابقت بسیار خوبی دارد.

مقایسه روابط هدایت هیدرولیکی

در این بخش به مقایسه روابط هدایت هیدرولیکی برای حل معادله ریچاردز پرداخته شده است. برای محاسبه هدایت هیدرولیکی به صورت تابعی از مکش یا رطوبت، روابط زیادی ارائه شده است. برای تخمین پارامترهای هیدرولیکی این روابط، مدل تهیه شده با روش حجم محدود، با نرم افزار RETC هم پیوند شده است. در این مدل از روابط هدایت هیدرولیکی گاردنر، وان گنوختن و بروکز-کری استفاده شده که فرم ریاضی رابطه بروکز-کری به صورت زیر است:

$$k(\psi) = \begin{cases} k_s \left(\frac{\psi b}{\psi} \right)^\lambda & \psi \geq \psi_b \\ k_s & \psi < \psi_b \end{cases} \quad (20)$$

و پارامترهای محاسبه شده توسط نرم‌افزار RETC برای ستون خاک ماسه‌ای معرفی شده در بخش قبلی عبارتند از:

$$K_s = 0.0944 \text{ cm} \quad \lambda = 1/4656, \psi_b = 28/7 \text{ cm}$$

همچنین پارامترهای مدل هدایت هیدرولیکی وان گنوختن (معادله ۱۷) که به وسیله نرم افزار RETC محاسبه شده عبارتند از:

$$K_s = 0.0944 \text{ cm/s} \quad n = 2/5176, a = 0.3523 \text{ cm}^{-1}$$

با در اختیار داشتن پارامترهای توابع هدایت هیدرولیکی گاردنر، بروکز-کری و وان گنوختن، برای ستون خاک ماسه‌ای، نیمرخ رطوبت برای این ستون خاک محاسبه و در شکل (۶) نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل (۶) نشان داده شده است نتایج حاصل از رابطه وان گنوختن مطابقت بهتری با داده‌های آزمایشگاهی دارد. به دلیل اینکه تابع هدایت هیدرولیکی بروکز-کری از نظر ریاضی ناپیوسته است، نتایج حاصل از آن با داده‌های آزمایشگاهی مطابقت خوبی ندارد.

خاک ماسه ای

در این مسئله، نفوذ یک بعدی آب به درون ستون خاک ماسه‌ای بررسی می‌شود. در ابتدای آزمایش، کل ستون خاک تحت فشار $\psi = -61/5 \text{ cm}$ قرار دارد. در انتهای ستون، بار فشار دارای مقدار ثابت $\psi = -61/5 \text{ cm}$ است. همچنین در سطح فوقانی این ستون، دبی ویژه برابر مقدار ثابت 0.03808 سانتی‌متر بر ثانیه می‌باشد. برای شبیه‌سازی این مدل، از ستون پلکسی‌گلاس^۱ در آزمایشگاه استفاده شده است. مقادیر اندازه‌گیری شده رطوبت در اعماق مختلف و در زمان‌های مختلف، توسط هاورکمپ و همکاران^۳ گزارش شده است. طول این ستون خاک ۷۰ سانتی‌متر و مقطع آن مربعی به ضلع ۵ سانتی‌متر می‌باشد. شرایط اولیه و مرزی حاکم بر این مسئله عبارتند از:

$$\text{شرایط مرزی: } \begin{cases} \psi(0, t) = -20/7 \text{ cm} \\ \psi(70, t) = -61/5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{شرایط اولیه: } \psi(z, 0) = -61/5 \text{ cm}$$

هاورکمپ و همکاران (۳) از مدل‌های منحنی رطوبتی و هدایت هیدرولیکی گاردنر (۲) به شرح زیر استفاده نمودند:

$$\theta = \theta_r + \frac{A(\theta_s - \theta_r)}{A + \psi^B} \quad (18)$$

$$k(\psi) = k_s \frac{D}{D + \psi^c} \quad (19)$$

هاورکمپ و همکاران (۳) پارامترهای منحنی مشخصه رطوبتی معادله ۱۸ را به صورت زیر ارائه دادند:

$$\theta_s = 0.287, \theta_r = 0.75A \\ = 1/175 \times 10^6, B = 3/96$$

همچنین پارامترهای مدل هدایت هیدرولیکی معادله ۱۸ را به صورت:

$$k_s = 0.000944 \frac{m}{s}, c = 4/94,$$

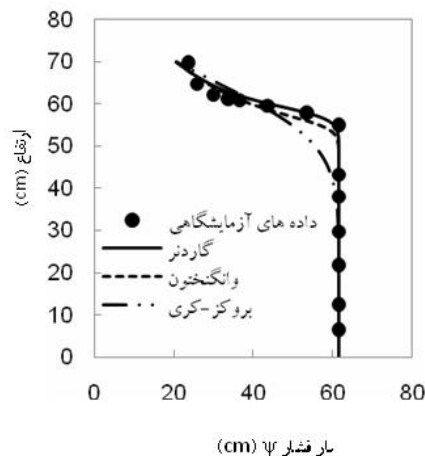
$$D = 1/611 \times 10^6$$

تعیین نمودند.

نتیجه گیری

همچنین استفاده از مدل هدایت هیدرولیکی وانگنختن جواب‌های بهتری نسبت به دیگر مدل‌های هیدرولیکی مانند مدل بروکز-کری و گاردنر ارائه می‌دهد.

در این مقاله معادله ریچاردز در حالت یک بعدی با استفاده از روش عددی حجم محدود حل شد. مطابقت خوب نتایج حل عددی با داده‌های آزمایشگاهی مبین آن است که روش عددی حجم محدود برای حل معادله ریچاردز، روش مناسبی است.



شکل ۶- نیم رخ رطوبت محاسبه شده با استفاده از توابع هدایت هیدرولیکی مختلف

منابع

1. Celia, M. A, and E. T. Bouloutus. 1990. A general Mass-Conservative Numerical Solution for the unsaturated flow Equations. *Water resource research*, 26: 1482-1495.
2. Gardner, W. R. 1974. The permeability problem. *Soil Science*, 117:248-249.
3. Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P. and G. Vachaud. 1979. Comparison of numerical simulation model for one dimensional infiltration. *Soil Science*, 15:181-187.
4. Haung, k., Zhang, R. and M. Van Genuchten. 1994. Eulerian-Lagrangian approach with an adaptively corrected method of characteristics to simulate variably saturated flow. *Water Resource Research*, 30:499-507.
5. Lu, zh. And D. Zhang, 2004. Analytical solution to steady state unsaturated flow in layered randomly heterogeneous soils via Kirchhof transformation. *Advances in water Resources*, and S. 27:775-784.
6. Menziani, M., Puganchi, S. and S. Vincenzi. 2007. Analytical solution of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary condition. *Journal of Hydrology*, 332:214-225.
7. Paniconi, C., Ferraris, S., Putti, M., Pini, G. and G. Gambolati. 1994. Three-dimensional numerical codes for simulating groundwater contamination: FLOW3D, flow in saturated and unsaturated porous media. *Pollution modeling*, 149-156.
8. Romano, N., Brunone, B. and A. Santini. 1998. Numerical analysis of one-dimensional unsaturated flow in layered soils. *Advance in Water Resources*, 21:315-324.

9. Simunek, J., Sejna, M. and M. Th. Van Genuchten. 1999. HYDRUS-2D: simulating water flow and solute transport in two-dimensional variably saturated media. Technical Report, IGWMC, Golden, CO, USA.
10. Srivastava, R. and T.C.J. Yeh.1991. Analytical solutions for one-dimensional transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils. *WaterResource Research*, 27:753-762.
11. Van Genuchten, M. Th. 1980. A closed form equation predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science*, 44:892-898.