

# نگرشی بر تحلیل عددی معادله ریچاردز جهت مدل‌سازی جریان در خاک‌های غیر اشباع

علیرضا قلمبر<sup>۱</sup>، سید محمدرضا هاشمی<sup>۲</sup> و شاهرخ زند پارسا<sup>۳\*</sup>

۱- دانشجوی سابق کارشناسی ارشد، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شیراز

۲- استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شیراز

۳- نویسنده مسئول، دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شیراز [zandparsa@shirazu.ac.ir](mailto:zandparsa@shirazu.ac.ir)

تاریخ پذیرش: ۹۲/۳/۲۹

تاریخ دریافت: ۹۰/۱۲/۱۵

## چکیده

بررسی جریان آب در خاک‌های غیر اشباع جهت تحلیل سازه‌های آبی حائز اهمیت ویژه‌ای است. نفوذ آب از سطح خاک و جریان آب در ستون خاک در چرخه هیدرولوژی خیلی مهم بوده و با حل معادله ریچاردز برآورد می‌شوند. در تحقیق حاضر نگرشی بر حل عددی معادله ریچاردز ارائه شده است. جهت تحلیل عددی معادله ریچاردز، ابتدا نوع معادله، شرایط مرزی آن و یک روش نسبتاً مدرن عددی به نام دیفرانسیال کوادرچر (LDQM) جهت حل آن مورد بحث قرار گرفت. روش LDQM تاکنون در تحقیقات زیادی مورد استفاده قرار گرفته و دارای دقت، کارایی و پایداری قابل توجهی است. جهت ارزیابی نتایج، از جواب‌های تحلیلی ارائه شده در پیشینه تحقیق و همچنین از داده‌های آزمایشگاهی استفاده گردید. نتایج نشان داد که روش LDQM از نظر دقت، پایداری و کارایی در جایگاه مناسبی قرار دارد و پیشنهاد می‌شود که جهت مدل‌سازی در حالت دو و سه بعدی نیز بررسی شود.

کلید واژه‌ها: جریان در محیط غیر اشباع، معادله ریچاردز، روش محلی دیفرانسیال کوادرچر.

## On the Numerical Analysis of Richards' Equation for Modeling Flow in Unsaturated Soils

A. Ghalambor<sup>1</sup>, M. R. Hashemi<sup>2</sup>, and Sh. Zand Parsa<sup>3</sup>

1- Former Graduate Student of Water Engineering Department, Agricultural College, Shiraz University.

2- Assistant Professor of Water Engineering Department, Agricultural College, Shiraz University.

3- Associate Professor of Water Engineering Department, Agricultural College, Shiraz University.

Received: 5.Mar.2012

Accepted: 19.June.2013

## Abstract

The flux of water in unsaturated soils plays an important role in analysis of hydraulic structures. In addition, water infiltration from the soil surface and flux through the soil column are important processes in hydrologic cycles, which they were predicted using the Richards' equation. The objective of the present research was to apply a novel numerical technique called Localized Differential Quadrature Method (LDQM) for modeling water flow in unsaturated soils. Up to now, LDQM has been used in many investigations and has been claimed as highly accurate, stable and efficient method. The 1-D Richards' equation was used as a simple mathematical model. At first, the governing equation and associated initial and boundary conditions were described. Then the implementation of the method for discretization of governing equations was discussed. An analytical solution data and experimental measurements were employed for evaluation of the results. It was concluded that, LDQM has high accuracy and efficiency. The application of the method for 2D and 3D cases is recommended for future researches.

**Keywords:** Flow in unsaturated soil, Richards' equation, Localized Differential Quadrature Method.

#### مقدمه

حرکت آب در خاک‌های غیر اشباع از مسائل بسیار مهم و پرکاربرد در سازه‌های هیدرولیکی، هیدرولوژی آب‌های زیرزمینی و کشاورزی است. مدل‌های حرکت آب در محیط غیر اشباع از دیرباز مورد توجه دانشمندان بوده است. رایج‌ترین مدلی که تاکنون ارائه گردیده است معادله ریچاردز است که اولین بار در سال ۱۹۳۱ ارائه شد. ریچاردز با استفاده از معادله‌های پیوستگی و داری و فرضیاتی مدل خود را برای جریان در خاک ارائه نمود.

تاکنون تحقیقات زیادی توسط افراد مختلف در خصوص تحلیل ریاضی و عددی این معادله صورت گرفته و هم‌اکنون نیز ادامه دارد. از جمله تحقیقاتی که در آن‌ها به تحلیل ریاضی معادله ریچاردز پرداخته شده است می‌توان به تحقیقات پارلانگ و همکاران<sup>۱</sup> (۱۹۹۷) و (۱۹۹۹)، ناچاپ و همکاران<sup>۲</sup> (۱۹۹۵)، یوان و لو<sup>۳</sup> (۲۰۰۵)، منزیانی و همکاران<sup>۴</sup> (۲۰۰۷)، تریسی<sup>۵</sup> (۲۰۰۷) و زلتنیک و همکاران<sup>۶</sup> (۲۰۰۷) اشاره کرد. هر کدام از محققین فوق با ساده‌سازی معادله ریچاردز اقدام به تحلیل ریاضی این معادله در حالت‌های مختلف کردند و بر اساس فرضیات اولیه خود به نتایج قابل قبولی در این زمینه دست یافتند.

دیا و همکاران<sup>۷</sup> (۲۰۰۱) با استفاده از روش المان‌های محدود ناپیوسته به بررسی انتقال املاح در پوشش خلل و فرج اشباع و غیر اشباع پرداختند. پاچسکی و همکاران<sup>۸</sup> (۲۰۰۳) نیز به بررسی معادله تعمیم یافته ریچاردز<sup>۹</sup> جهت شبیه‌سازی جریان در خاک‌های غیر اشباع پرداختند و یکی از نتایج ایشان این بود که معادله ریچاردز قادر به توصیف مشاهدات انتقال آب در ستون‌های خاک افقی نیست. در تحقیقات صورت گرفته، اکثر مطالعات در زمینه حل عددی به روش‌های تفاضل محدود<sup>۱۰</sup> و اجزاء محدود<sup>۱۱</sup> بوده است و تاکنون از روش دیفرانسیال کوادرچر<sup>۱۲</sup>، که در این پژوهش به آن پرداخته شده است، جهت حل عددی معادله ریچاردز استفاده نشده است.

در تحقیق حاضر جهت تحلیل عددی معادله یک بعدی ریچاردز، از روش دیفرانسیال کوادرچر محلی<sup>۱۳</sup> استفاده گردیده است. روش

دیفرانسیال کوادرچر محلی تاکنون در تحقیقات زیادی مورد استفاده قرار گرفته و دارای دقت، کارایی و پایداری قابل توجهی است. شو و ریچاردز<sup>۱۴</sup> (۱۹۹۲)، سان و ژو<sup>۱۵</sup> (۲۰۰۰) و و دینگ و همکاران<sup>۱۶</sup> (۲۰۰۶) به ترتیب با روش‌های دیفرانسیال کوادرچر تعمیم یافته<sup>۱۷</sup>، دیفرانسیال کوادرچر محلی آپویند<sup>۱۸</sup> و دیفرانسیال کوادرچر مالتی کوادریک<sup>۱۹</sup> همگی به مدل‌سازی عددی جریان‌های غیر متراکم لزج پرداختند. هاشمی و حاتم<sup>۲۰</sup> (۲۰۱۱) نیز به تحلیل عددی نشست غیر پایدار با استفاده از روش دیفرانسیال کوادرچر متنی بر تابع شعاعی<sup>۲۱</sup> پرداختند. تمامی محققین ذکر شده در نتایج خود به پایداری و دقت مناسب روش دیفرانسیال کوادرچر در شکل‌های مختلف حل ذکر شده دست یافته‌اند.

#### تئوری جریان در خاک غیر اشباع

##### معادله یک بعدی ریچاردز

ریچاردز<sup>۲۲</sup> (۱۹۳۱) با استفاده از معادله‌های پیوستگی و داری که برای جریان در خاک‌های اشباع استفاده می‌گردد، معادله خود را جهت شبیه‌سازی جریان در خاک غیر اشباع ارائه کرد.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \right) \quad (1)$$

در معادله بالا  $K(\theta)$ : هدایت هیدرولیکی خاک  $[LT^{-1}]$  به صورت تابعی از رطوبت حجمی در خاک  $(\theta)$ ،  $z$ : ارتفاع تا سطح مبنا (به طرف بالا مثبت)  $[L]$  و  $q$ : برابر شدت جریان در واحد سطح  $[LT^{-1}]$  است.  $D(\theta)$ : نیز برابر ضریب پخشیدگی معادل  $K(\theta) \frac{dh}{d\theta}$   $[L^2T^{-1}]$  است که در این رابطه  $h$  برابر ارتفاع فشار آب خاک  $[L]$  می‌باشد. با باز کردن ضریب پخشیدگی، معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\theta) \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \right) \quad (2)$$

14- Shu and Richards

15- Sun and Zhu

16- Ding et al.

17- Generalized differential quadrature

18- Upwind local differential quadrature

19- Differential quadrature multiquadric

20- Hashemi and Hatam

21- Local radial basis function-based differential quadrature method

22- Richards

1- Parlange et al.

2- Nachabe et al.

3- Yuan and Lu

4- Menziani et al.

5- Tracy

6- Zoltnic et al.

7- Diaw et al.

8- Pachepsky et al.

9- Generalized Richards' Equation

10- Finite difference method

11- Finite element method

12- Differential quadrature method

13- Local differential quadrature method

$$\Delta z \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = I - O - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \quad (6)$$

در معادله فوق مقادیر I و O: به ترتیب برابر شدت جریان‌های ورودی<sup>۳</sup> مانند شدت بارندگی و خروجی<sup>۴</sup> و  $\Delta z$ : ضخامت لایه سطحی سطحی هستند. شرایط مرزی بالادست می‌توانند شامل جریان‌های ورودی ثابت و یا غیر ثابت باشند.

شرط مرزی پایین دست می‌تواند شامل شدت جریان ثابت و یا متغیر خروجی از سیستم، مقادیر مختلف فشار آب خاک و همچنین حالت زهکشی آزاد باشند. در حالت زهکشی آزاد در لایه آخر به دلیل عدم تغییر مقادیر رطوبت در عمق، از معادله زیر به عنوان شرط مرزی پایین دست استفاده می‌گردد:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

### حل عددی معادله ریچاردز

همان‌طور که گفته شد در این پژوهش از روش حل عددی ديفرنشیل کوادرچر محلی استفاده گردیده که در زیر به بررسی این روش پرداخته شده است.

### روش محلی ديفرنشیل کوادرچر (LDQM)

اساساً در روش LDQM مقادیر مشتقات مرتبه اول تا  $m$  در هر نقطه بر اساس ضرب یک سری ضرایب وزنی در مقادیر تابع در نقاط اطراف نقطه مورد نظر جهت مشتق‌گیری محاسبه می‌گردند. تفاوت اصلی روش محلی با حالت کلی روش LDQM در این است که در آن بر خلاف روش کلی، نیازی به استفاده از کل نقاط موجود در شبکه جهت انجام محاسبه مشتقات نخواهد بود و تنها با انتخاب تعداد محدودی از نقاط می‌توان به دقت کافی در نتایج دست یافت. این امر سبب می‌گردد که بتوان از روش محلی در حل مسائل با شبکه‌های نامنظم نیز مطابق شکل (۱) استفاده کرد. در روش LDQM مشتق به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x_k) = \sum_{j=1}^N w_{kj}^m \cdot f(x_j) \quad , k=1,2,\dots,N \quad (8)$$

در رابطه فوق مقدار  $m$ : برابر مرتبه مشتق،  $f(x_j)$ : برابر مقدار تابع در نقطه  $j$  و مقادیر  $w$ : برابر ضرایب وزنی هستند. مقادیر  $i$ : در رابطه بالا بیانگر بازه نقاط انتخابی در شبکه هستند. برای مشتقات مرتبه اول و دوم رابطه بالا را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

معادله ریچاردز یک معادله غیر خطی از نوع مشتقات جزئی است و به روش‌های معمول ریاضی قابل حل نمی‌باشد.

تاکنون معادله‌هایی جهت برآورد مقادیر K و h بر حسب رطوبت خاک توسط محققین مختلفی ارائه شده است. در این پژوهش از معادله‌های کمپبل<sup>۱</sup> (۱۹۷۴) استفاده شده است. معادله‌های کمپبل (۱۹۷۴) جهت برآورد مقادیر هدایت هیدرولیکی آب در خاک و همچنین برآورد مقادیر ارتفاع فشار آب خاک به شرح زیر می‌باشد:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left( \frac{\theta}{\Phi} \right)^{3 + \frac{2}{\lambda}} \quad (3)$$

$$\frac{\theta}{\Phi} = \left( \frac{h_b}{h} \right)^\lambda \quad (4)$$

که در آنها  $K_s$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$  و  $h_b$ : به ترتیب برابر هدایت هیدرولیکی اشباع خاک ( $L T^{-1}$ )، تخلخل (که از نظر کمی برابر رطوبت اشباع خاک است) ( $L^3 L^{-3}$ )، شاخص اندازه منافذ و بار مکش ورود هوا به خاک (L) هستند. تعیین پارامترهای فوق بر اساس جدول ارائه شده توسط راوز و براکنسیک<sup>۲</sup> (۱۹۸۵) برای خاک‌ها با بافت مختلف امکان‌پذیر است.

با فرض معلوم بودن مقادیر K و h در معادله ریچاردز، پس از ادغام روابط (۲)، (۳) و (۴)، معادله ریچاردز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + B(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (5)$$

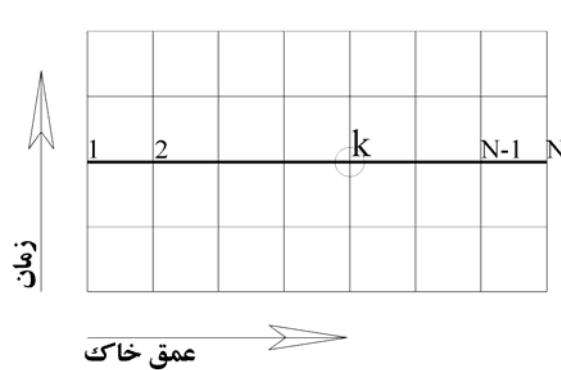
$$A(\theta) = \left( K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{d\psi}{d\theta} + K(\theta) \frac{d^2\psi}{d\theta^2} \right)$$

$$B(\theta) = \left( \frac{dK(\theta)}{d\theta} \right)$$

که در رابطه بالا همان‌طور که نشان داده شده است ضرایب A(θ) و B(θ) ضرایبی بر حسب مقادیر مختلف θ هستند.

### شرایط مرزی و اولیه

از آنجا که معادله ریچاردز از مرتبه دو می‌باشد، حل این معادله نیاز به دو شرط مرزی به‌علاوه شرایط اولیه خواهد داشت. هنگام ورود جریان آب به خاک مانند نزولات جوی و خروج جریان آب از خاک مانند تبخیر از سطح خاک، شرط مرزی بالادست به صورت زیر اعمال می‌گردد:



شکل ۱- نمایی از خطوط شبکه بندی جهت حل به روش دیفرانسیال کوادرچر

در روابط بالا  $k$ : نقطه مورد نظر جهت مشتق گیری است،  $N_L$ : معرف نقاط انتخاب شده در شبکه بوده و  $M$ : تابع درون یابی چندجمله ای لاگرانژ است و به صورت زیر نوشته می شود:

$$M(x_k) = \prod_{u=1, u \neq k}^{N_L} (x - x_u) \quad (13)$$

با اعمال روابط بالا در معادله ریچاردز، این معادله جهت حل به روش محلی دیفرانسیال کوادرچر به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sum_{j=1}^T a_{kj} \cdot f(x_j) = A(\theta_{ij}) \cdot \sum_{j=1}^Z b_{kj} \cdot f(x_j) + B(\theta_{kj}) \cdot \sum_{j=1}^Z a_{kj} \cdot f(x_j) \quad (14)$$

جهت حل معادله بالا نیز از روش نیوتن غیر خطی استفاده شده است. حل دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجهول با این روش سبب ظاهر شدن مشتقات درجه سه از  $h$  و  $K$  در معادله ساده سازی شده ریچاردز می گردد. با مشتق گیری از معادله ارائه شده از سوی کمپبل (۱۹۷۴) و به دست آوردن مقادیر مختلف مشتقات درجه اول تا سوم در رطوبت های مختلف، مشاهده می گردد که با افزایش مرتبه مشتقات در رطوبت های کم و نزدیک به رطوبت باقیمانده  $\theta_r$  مقادیر کمی مشتقات  $h$  نسبت به رطوبت در رطوبت های مختلف به اعداد با اندازه های بسیار زیاد می رسند. با در نظر گرفتن این مسئله توصیه می شود که در این محدوده با دقت بیشتری از تابع مذکور استفاده گردد. در شکل (۲) مقادیر  $\frac{d^3 h}{d\theta^3}$  در رطوبت های مختلف، برای یک خاک با بافت لوم رسی شنی، بر اساس تابع کمپبل (۱۹۷۴) ارائه شده

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_k) = \sum_{j=1}^N a_{kj} \cdot f(x_j) \quad (9)$$

$$, k = 1, 2, \dots, N, \quad a_{ij} = w_{kj}^1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_k) = \sum_{j=1}^N b_{kj} \cdot f(x_j) \quad (10)$$

$$, k = 1, 2, \dots, N, \quad b_{ij} = w_{kj}^2$$

ضرایب وزنی  $a$  و  $b$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a_{kj} = \frac{M^{(1)}(x_k)}{(x_k - x_j) \cdot M^{(1)}(x_j)} \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, N_L$$

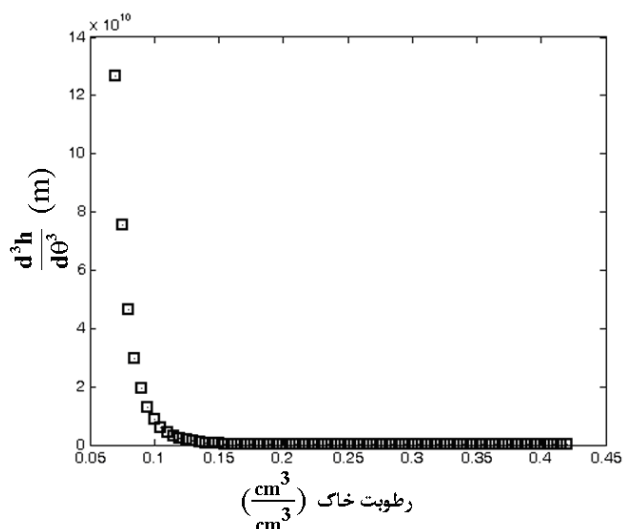
$k = \text{for } k \neq j$ ; نقطه مورد نظر

$$a_{kk} = - \sum_{j=1, j \neq k}^{N_L} a_{kj}$$

$$b_{kj} = \sum_{u=1}^{N_L} a_{ku} \cdot a_{uj} = 2a_{kj} \left( a_{kk} - \frac{1}{x_k - x_j} \right) \quad (12)$$

$$\text{for } j = 1, 2, \dots, N_L; \quad u = 1, 2, \dots, N_L; \quad k \neq j$$

$$b_{kk} = - \sum_{j=1, j \neq k}^{N_L} b_{kj}$$



شکل ۲- مقادیر  $\frac{d^3h}{d\theta^3}$  در رطوبت‌های مختلف برای خاک با بافت لوم رسی شنی

$$(h_b=0.5941 \text{ cm}, \lambda=0.319, \Phi=0.0043 \text{ m/h})$$

در روابط بالا مقادیر  $\theta_i^B$  و  $\theta_i^M$ : به ترتیب مقادیر رطوبت خاک مبنا (نتایج حل تحلیلی و یا داده‌های آزمایشگاهی) و رطوبت خاک محاسبه شده به روش‌های حل عددی هستند و مقدار  $N$ : تعداد کل نقاط اندازه‌گیری مقادیر رطوبت است.

### نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی و حل دو مثال عددی پرداخته خواهد شد. در مثال اول نتایج حاصل از یک حل تحلیلی با روش حل عددی LDQM مقایسه خواهد شد تا دقت و صحت نتایج روش عددی مورد استفاده قرار گرفته در مقایسه با روش حل تحلیلی ذکر شده مشخص گردد. در مثال دوم نتایج یک اندازه‌گیری میدانی با نتایج حل عددی مورد مقایسه قرار خواهد گرفت تا اختلاف نتایج حاصله با حالت واقعی تعیین گردند.

### مثال شماره یک

منزیانی و همکاران<sup>۴</sup> (۲۰۰۷) با روش حل تحلیلی معادله‌هایی را استخراج نمودند که با استفاده از آنها، معادله ریچاردز در شرایط مرزی مختلف قابل حل است. این محققین در حل تحلیلی خود با ثابت در نظر گرفتن مقادیر ضریب پخشیدگی آب خاک (D) و مشتق هدایت هیدرولیکی خاک نسبت به رطوبت ( $\frac{dK}{d\theta}$ ) به معادله‌های نهایی خود دست یافتند. پارامترهای مورد استفاده بر اساس نتایج پژوهش وستن

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش مقادیر رطوبت، مقدار عددی  $\frac{d^3h}{d\theta^3}$  به سمت مقادیر کمی بالا اوج می‌گیرد.

در پژوهش فعلی جهت مقایسه نتایج نهایی از شاخص‌های آماری زیر استفاده گردیده است:  
۱- متوسط قدرمطلق خطای نسبی<sup>۱</sup>

$$AASE = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \frac{\theta_i^B - \theta_i^M}{\theta_i^B} \right| \times 100 \quad (15)$$

۲- جذر متوسط مربع خطا<sup>۲</sup>

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\theta_i^B - \theta_i^M)^2}{N}} \quad (16)$$

۳- ضریب تعیین<sup>۳</sup>

$$R^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^N (\theta_i^B - \bar{\theta}_i^B)(\theta_i^M - \bar{\theta}_i^M) \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^N (\theta_i^B - \bar{\theta}_i^B)^2 \sum_{i=1}^N (\theta_i^M - \bar{\theta}_i^M)^2 \right)} \quad (17)$$

1- Average of Absolute Square Error (AASE)

2- Root Mean Square Error (RMSE)

3- Coefficient of determination ( $R^2$ )

4- Menziani et al.

جدول ۱- پارامترهای وستن و همکاران (۱۹۹۹) جهت حل ریاضی و عددی معادله ریچاردز

بافت خاک	تعریف (%)	$K_s$ ( $m s^{-1}$ )	$\alpha$ ( $m^{-1}$ )	$\theta_r$ ( $m^3 m^{-3}$ )	$\theta_s$ ( $m^3 m^{-3}$ )	$V$ ( $m s^{-1}$ )
درشت	$18 < rs < 65$ شن	$6/9 \times 10^{-6}$	۳/۸	۰/۰۲۵	۰/۴۰	$1/8 \times 10^{-5}$
ریز	$35 < rs < 60$ شن	$2/9 \times 10^{-6}$	۳/۷	۰/۰۱	۰/۵۲	$5/7 \times 10^{-6}$

در روابط بالا مقادیر  $\theta_p$ ,  $\theta_h$ ,  $t_p$  و  $t_h$ : به ترتیب برابر رطوبت لایه‌های خاک بعد از اشباع شدن سطح خاک، رطوبت در حالت خاک خشک، زمان اشباع شدن سطح خاک و زمان خشک شدن خاک هستند.

بر اساس پارامترهای ثابت  $D$  و  $V$  معادله (۲۴) به صورت نهایی معادله ریچاردز جهت حل تحلیلی این معادله توسط منزیانی و همکاران (۲۰۰۷) ارائه شده است:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + V \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (24)$$

در جدول (۱) نیز پارامترهای نهایی بر اساس تحقیقات وستن و همکاران (۱۹۹۹) ارائه شده است.

در این پژوهش جهت کنترل نتایج حاصل از حل عددی معادله ریچاردز به روش دیفرانسیال کوادچر از نتایج یکی از مثال‌های منزیانی و همکاران (۲۰۰۷) استفاده گردیده است.

در این مثال دو نوع خاک با بافت‌های درشت و ریز تحت اثر شرط مرزی افزایش رطوبت در لایه سطحی با شار ورودی ثابت تا مرز اشباع و شرط اولیه رطوبت، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. جهت تعیین پارامترهای مورد نیاز مدل‌سازی از پارامترهای جدول (۱) استفاده گردیده است. مقدار رطوبت اولیه در دو خاک در لحظه  $t = 0$  برابر ۰/۱ و مقدار شار ورودی جریان آب در خاک با بافت درشت و ریز به ترتیب برابر با  $1 \times 10^{-5}$  و  $5 \times 10^{-6}$  متر بر ثانیه می‌باشند.

#### نتایج مدل‌سازی عددی خاک با بافت درشت

در شکل (۳) نتایج حاصل از پژوهش این محققین با روش دیفرانسیال کوادچر با انتخاب مقادیر  $\Delta t = 1800$  ثانیه و  $\Delta Z = 1$  سانتیمتر مورد مقایسه قرار گرفته است. اعداد نوشته شده بر روی هر نمودار برابر زمان بر حسب ساعت هستند.

و همکاران<sup>۱</sup> (۱۹۹۹) و همچنین معادله‌های گاردنر<sup>۲</sup> (۱۹۵۸) به شرح زیر می‌باشند.

$$K = K_s e^{\alpha h} \quad (18)$$

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h} \quad (19)$$

با ساده‌سازی معادله‌های بالا خواهیم داشت:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (20)$$

$$V = \frac{dK(\theta)}{d\theta} = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} = \text{ثابت} \quad (21)$$

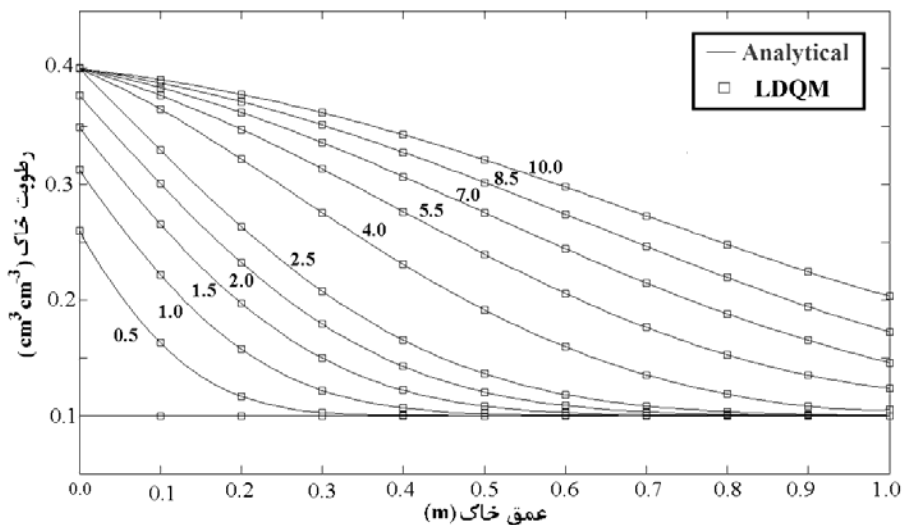
$$D = K(\theta) \frac{dh}{d\theta} = \frac{V}{\alpha} = \text{ثابت} \quad (22)$$

معادله منزیانی و همکاران (۲۰۰۷) برای شرایط اولیه و مرزی به شرح زیر می‌باشند:

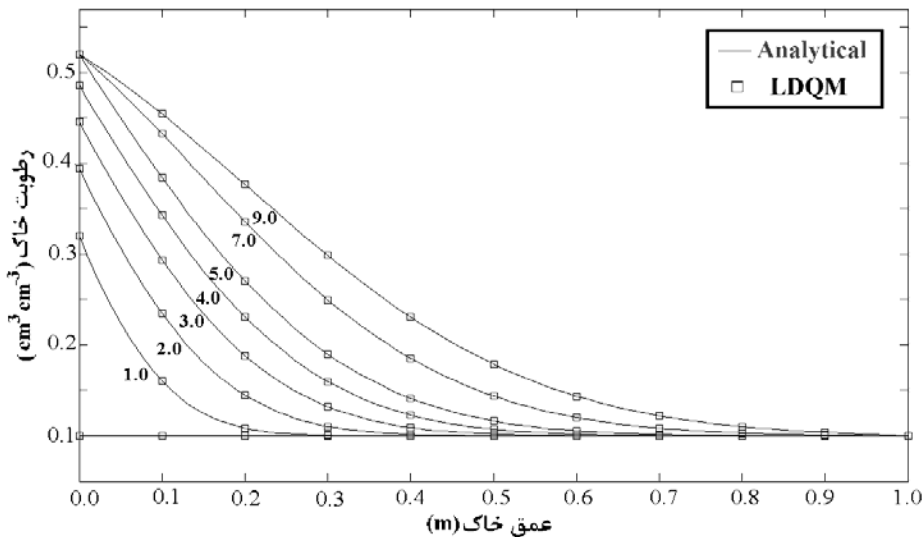
$$\phi_0(t) = q_0 \quad (z = 0; t > 0)$$

$$\theta_i(z) = 0 \quad (z \geq 0; t = 0),$$

$$\begin{aligned} \theta(z, t) = & \frac{q_0}{V} \left[ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{V \cdot t - z}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \right) \right] \\ & + q_0 \cdot \frac{e^{-\frac{V \cdot z}{D}}}{2} \left[ \frac{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}}{D} \operatorname{erfc} \left( \frac{V \cdot t + z}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \right) \right] \\ & + q_0 \cdot \frac{e^{-\frac{V \cdot z}{D}}}{2} \left[ -\frac{1}{V} \operatorname{erfc} \left( \frac{V \cdot t + z}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$



شکل ۳- مقایسه مقادیر محاسبه شده رطوبت خاک با استفاده از معادله (۲۳) و شبیه‌سازی شده با استفاده از روش LDQM در زمان‌های مختلف برای خاک با بافت درشت در زمان‌های مختلف (ساعت)



شکل ۴- مقایسه مقادیر محاسبه شده رطوبت خاک با استفاده از معادله (۲۳) و شبیه‌سازی شده با استفاده از روش LDQM در زمان‌های مختلف برای خاک با بافت ریز در زمان‌های مختلف (ساعت)

در جدول‌های (۴) و (۵) نیز مقادیر درصد خطا به ازای مقادیر مختلف  $\Delta t$  و  $\Delta z$  برای دو خاک با بافت درشت و ریز ارائه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن مقادیر یکسان  $\Delta z$ ، در روش محلی دیفرانسیال کوادرچر می‌توان با انتخاب مقادیر نسبتاً بالای  $\Delta t$  به نتایج قابل قبولی دست یافت.

#### نتایج مدل‌سازی عددی خاک با بافت ریز

در شکل (۴) نتایج حاصل از پژوهش این محققین با روش دیفرانسیال کوادرچر با انتخاب مقادیر  $\Delta t=1800$  ثانیه و  $\Delta z=1$  سانتیمتر مورد مقایسه قرار گرفته است. اعداد نوشته شده بر روی هر نمودار برابر زمان بر حسب ساعت هستند. در جدول‌های (۲) و (۳) مقادیر متوسط قدرمطلق خطای نسبی و جذر متوسط مربع خطا در زمان‌های مختلف برای هر دو نوع بافت خاک درشت و ریز دانه ارائه گردیده است.

جدول ۲- مقایسه مقادیر متوسط قدر مطلق خطای نسبی و ریشه متوسط مربع خطا برای خاک درشت دانه

زمان (ساعت)	متوسط قدرمطلق خطای نسبی (درصد)	جذر متوسط مربع خطا (سانتیمتر)
۰/۵	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۱/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۱/۵	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۲/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۲/۵	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۴/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۵/۵	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۷/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۸/۵	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۱۰/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱

جدول ۳- مقایسه مقادیر متوسط قدر مطلق خطای نسبی و ریشه متوسط مربع خطا برای خاک ریزدانه

زمان (ساعت)	متوسط قدرمطلق خطای نسبی (درصد)	جذر متوسط مربع خطا (سانتیمتر)
۱/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۲/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۳/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۴/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۵/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۷/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱
۹/۰	<۰/۰۱	<۰/۰۰۱

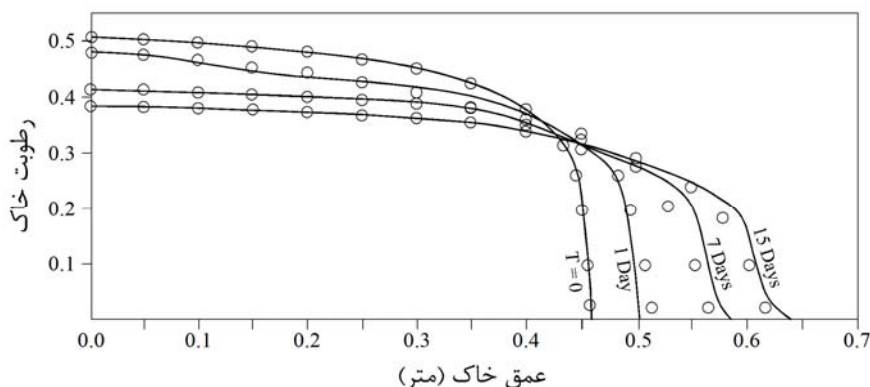
جدول ۴- مقایسه مقادیر متوسط قدر مطلق خطای نسبی دو روش حل عددی به ازای مقادیر مختلف  $\Delta t$  برای خاک درشت دانه

جذر متوسط مربع خطا (سانتیمتر)	$\Delta t$ (ثانیه)	$\Delta Z$ (سانتیمتر)
۰/۰۴	۳۶۰۰	۱/۰
<۰/۰۱	۱۸۰۰	۱/۰
<۰/۰۱	۹۰۰	۱/۰

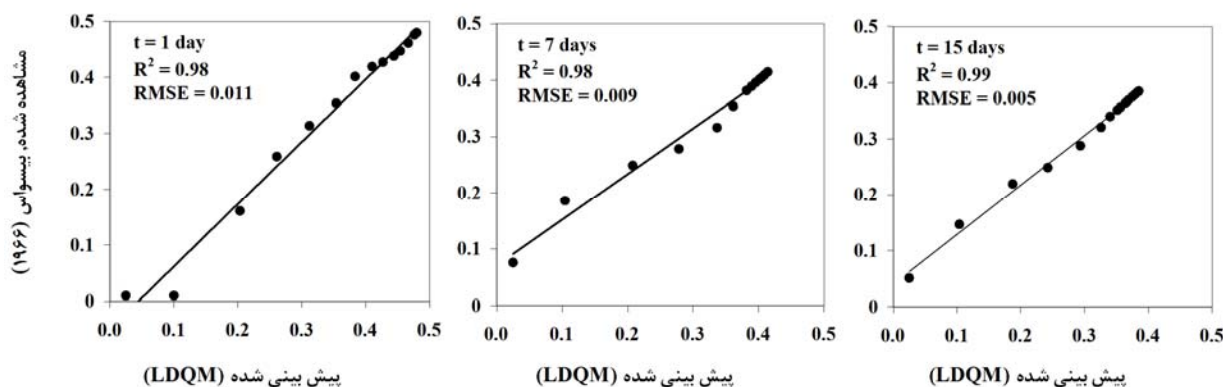
جدول ۵- مقایسه مقادیر متوسط قدر مطلق خطای نسبی دو روش حل عددی به ازای مقادیر مختلف  $\Delta t$  برای خاک ریزدانه

جذر متوسط مربع خطا (سانتیمتر)	$\Delta t$ (ثانیه)	$\Delta Z$ (سانتیمتر)
۰/۰۲	۳۶۰۰	۱/۰
<۰/۰۱	۱۸۰۰	۱/۰
<۰/۰۱	۹۰۰	۱/۰





شکل ۵- مقایسه نتایج مدل سازی عددی به روش LDQ (o) با مقادیر اندازه گیری شده در زمان های مختلف (—) توسط بیسواس و همکاران (۱۹۶۶)



شکل ۶- مقایسه نتایج روش LDQ با مقادیر اندازه گیری شده در زمان های مختلف

مقادیر معقولی برخوردار هستند و بر این اساس می توان گفت که پیش بینی مقادیر رطوبت حجمی خاک در زمان های مختلف از دقت مناسبی در مقایسه با مقادیر اندازه گیری شده برخوردار است.

### نتیجه گیری

در این پژوهش روش حل عددی دیفرانسیال کوادرچر محلی جهت شبیه سازی جریان در خاک غیر اشباع با استفاده از معادله ریچاردز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصله در نمودارهای تعیین مقادیر ضرایب تعیین و جذر متوسط مربع مقادیر خطا، در مقایسه نتایج حل عددی به روش دیفرانسیال کوادرچر محلی با مقادیر اندازه گیری شده، همگی بیانگر دقت بالای روش دیفرانسیال کوادرچر محلی در مدل سازی عددی جهت شبیه سازی جریان در خاک های غیر اشباع هستند. همچنین همان طور که دیده شد، در مقایسه روش ذکر شده با حل تحلیلی منزبانی و همکاران (۲۰۰۷)، می توان با انتخاب مقادیر نسبتا بالای  $\Delta t$  در روش دیفرانسیال کوادرچر محلی به نتایج قابل قبولی دست یافت.

### مثال شماره ۲

پس از بررسی نتایج روش عددی LDQ با نتایج تحلیل ریاضی، در این قسمت با استفاده از روش حل عددی دیفرانسیال کوادرچر محلی یک مثال بر اساس نتایج آزمایشگاهی بیسواس و همکاران<sup>۱</sup> (۱۹۶۶) جهت مقایسه روش حل عددی ذکر شده با نتایج واقعی ارائه گردیده است. در مثال زیر بافت خاک از نوع لوم رسی و با شرایط مرزی و اولیه نشان داده شده در جدول (۱) می باشد. در شکل (۵) نتایج حاصل از مدل سازی عددی به روش دیفرانسیال کوادرچر محلی در زمان های مختلف با نتایج حاصله از اندازه گیری آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته اند.

در نمودارهای زیر نیز مقادیر ضریب تعیین (مربع ضریب همبستگی)، ضریب همبستگی و ریشه متوسط مجذور خطا در زمان های مختلف مدل سازی عددی نسبت به داده های آزمایشگاهی نشان داده شده است. همان طور که در شکل (۶) مشخص است در کلیه زمان های اندازه گیری، پارامترهای ذکر شده از

### منابع

- 1- Boersma, L., Cary, J. W., Evans, D. D., Ferguson, A. H., Gardner, W. H., Hanks, R. J., Jackson, R. D., Kemper, W. D., Miller, D. E., Nielsen, D. R., and Uehara, G. 1972. Soil Physics. American Society of Agronomy, Soil Science of America.
- 2- Campbell, j. d. 1974. A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data. Soil Science, 117: 311–314.
- 3- Diaw, E. B., Lehmann, F., Ackerer, Ph. 2001. One-dimensional simulation of solute transfer in saturated–unsaturated porous media using the discontinuous finite elements method. Journal of Contaminant Hydrology, 51:197–213.
- 4- Ding, H. S., Hu, C., K. Yeo. S., and Xu. D. 2006. Numerical computation of three-dimensional incompressible viscous flows in the primitive variable form by local multiquadric differential quadrature method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195:516–533.
- 5- Gardner, W. 1958. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. Soil Science, 85: 228–232.
- 6- Hashemi, M. R., and Hatam, F. 2011. Unsteady seepage analysis using local radial basis function-based differential quadrature method. Applied Mathematical Modelling, 35:4934–950.
- 7- Menziani, M., Pugnaghi, S., and S. Vincenzi, S. 2007. Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary condition. Journal of Hydrology, 332:214– 225.
- 8- Nachabe, M.H., Islas, A. L., and Illangasekare, T. H. 1995. Analytical solutions for water flow and solute transport in the unsaturated zone. Models for Assessing and Monitoring Groundwater Quality, IAHS publication no. 227.
- 9- Pachepsky, Y., Timlin, D., and Rawls, W. 2003. Generalized Richards’ equation to simulate water transport in unsaturated soils. Journal of Hydrology, 272: 3-13.
- 10- Parlange. J.Y., Barry, D. A., Parlange, M. B., Hogarth, W. L., Haverkamp, R., Ross, P. J., Ling L., and Seenhuis, T. S. 1997. New approximate analytical technique to solve Richards equation for arbitrary surface boundary conditions. Water Resources Research, 33:903–906.
- 11- Parlange, J.Y, Hogarth, W. L., Barry, D. A., Parlange, M. B., Haverkamp, R., Ross, P. J., Steenhuis, T. S., DiCarlo, D. A., and Katul, G. 1999. Analytical approximation to the solutions of Richards' equation with applications to infiltration, ponding, and time compression approximation. Advanced Water Resources, 23:189-194.
- 12- Rawls, W. J., and Brakensiek, D. L. 1985. Prediction of soil water properties for hydrologic modeling. Proceedings of the conference “Watershed Management in the Eighties” , ASCE, Colorado, USA, p. 293–299.
- 13- Richards, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, 1(5):318-333.
- 14- Shu, C., and Richards, B. E. 1992. Parallel Simulation of incompressible viscous flows by generalized differential quadrature. Computer Systems Engineering, 3:271-281.
- 15- Sun, J., and Zhu, Z. 2000. Upwind local differential quadrature method for solving incompressible viscous flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188:495-504.
- 16- Tracy, F.T. 2007. Three-dimensional analytical solutions of Richards’ equation for a box-shaped soil sample with piecewise-constant head boundary conditions on the top. Journal of Hydrology, 336:391–400.
- 17- Zlotnik, V., Wang, T. N., and Simunek. J., 1980. Verification of numerical solutions of the Richards equation using a traveling wave solution. Advanced Water Resources, 30:1973–1980.

- 18- Yuan, F., and Lu, Z. 2005. Analytical solutions for vertical flow in unsaturated, rooted soils with variable surface fluxes. *Vadose Zone Journal*, 4:1210–1218.
- 19- Wosten, J. H. M., Lilly, A., Nemes, A., Le Bass, C. 1999. Development and use of a database of hydraulic properties of European soils. *Geoderma*, 90: 160–185.