

ارزیابی مدل‌های تلفیقی ARMA-ARCH و BL-ARCH در مدل‌سازی تراز سطح آب دریاچه ارومیه

محمد ناظری تهرودی^{۱*}، کیوان خلیلی^۲، مرضیه عباس‌زاده افشار^۳ و جواد بهمنش^۴

^{۱*} - نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری منابع آب، دانشگاه بیرجند. m_nazeri2007@yahoo.com

^۲ - استادیار گروه مهندسی آب، دانشگاه ارومیه

^۳ - دانشجوی کارشناسی ارشد منابع آب، دانشگاه ارومیه

^۴ - دانشیار گروه مهندسی آب، دانشگاه ارومیه

تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۰/۳۰

تاریخ دریافت: ۹۳/۶/۱۸

چکیده

اکثر مدل‌های غیرخطی بر پایه مدل‌سازی میانگین خطا توسعه یافته‌اند اما مدل‌های غیرخطی خودهمبسته با واریانس شرطی، بر پایه مدل‌سازی واریانس داده‌های سری باقی‌مانده استوار هستند. این مدل‌ها با ترکیب شدن با مدل‌های خطی، تا حدودی دقت مدل‌سازی و پیش‌بینی‌ها را افزایش می‌دهند. در این مطالعه با استفاده از داده‌های تراز سطح آب دریاچه ارومیه در دوره آماری ۹۱-۱۳۵۲، مدل‌های خودهمبسته با میانگین متحرک و دو خطی و دو مدل ترکیبی (خودهمبسته با میانگین متحرک با واریانس شرطی) و (دو خطی با واریانس شرطی) مورد ارزیابی قرار گرفتند. برای انتخاب مدل‌های خانواده آرما از معیار آکائیکه و برای صحت‌سنجی مدل‌ها از دو آزمون همبستگی و میانگین جذر واریانس خطا استفاده شد. نتایج صحت‌سنجی مدل‌های ARMA-BL، ARCH و BL-ARCH به ترتیب ضریب همبستگی ۰/۷۰۷، ۰/۶۱۸، ۰/۷۹۲ و ۰/۷۰۴ بین داده‌های محاسباتی و مشاهداتی و میانگین جذر واریانس خطا ۲/۸۳۶، ۴/۳۰۹، ۲/۰۳۱ و ۴/۴۱۱ را نشان داد. همچنین نتایج نشان داد در مورد مدل آرما، تلفیق مدل خطی و غیرخطی، دقت مدل افزایش پیدا کرد ولی در مورد مدل دو خطی دوخطی، تلفیق دو مدل غیرخطی باعث کاهش نسبتاً کم‌دقت مدل شد. به‌طور کلی نتایج نشان داد که با تلفیق دو مدل ARCH و ARMA، میزان خطای مدل حدود ۲۸ درصد کاهش و با تلفیق دو مدل غیرخطی، میزان خطای مدل حدود ۲ درصد افزایش یافت.

کلید واژه‌ها: آرما، خودهمبسته، مدل دو خطی، واریانس شرطی.

Evaluation of Combined ARMA-ARCH and BL-ARCH models in Modeling Lake Urmia water level

M. Nazeri Tahroudi^{1*}, K. Khalili², M. Abbaszadeh Afshar³ and J. Behmanesh⁴

^{1*} - Corresponding Author, Ph.D Student of Water Resources Engineering, Birjand University, Iran.

² - Assistant Professor, Department of Water Engineering, Urmia University, Iran.

³ - MSc Student of Water Resources Management, Urmia University, Iran.

⁴ - Associate Professor, Department of Water Engineering, Urmia University, Iran.

Received: 9 September 2014

Accepted: 20 January 2016

Abstract

Many nonlinear models have been developed based on the mean errors modeling. However, the non-linear models with Autoregressive conditional heteroscedasticity are based on variance modeling. These models are combined with linear models, partly to increase the accuracy of modeling and predictions. In this study, using data from the Urmia Lake water level data for the period 1973-2012, the models with autocorrelation moving average and Bilinear model and two combined models (Autoregressive conditional heteroscedasticity) and (Bilinear conditional heteroscedasticity) were evaluated. To select the ARMA family models, AICC test were used and regression coefficient (r) and root mean square error (RMSE) tests were used for validation models. The results of validation the ARMA, BL, ARMA-ARCH and BL-ARCH models showed the correlation coefficient of 0.707, 0.618, 0.792 and 0.704 and the mean square root equal 2.838, 4.309, 2.031 and 4.11 between observed and modeling data respectively. Also the results showed that model accuracy increased with combining both linear and nonlinear models, but with combining two nonlinear models is caused reduce the accuracy of the models. Overall the results

showed that by combining ARMA and ARCH models, the model error decreased about 28 percentage and combining two non-linear models caused increased model error about 2 percentage.

Keywords: ARMA, Autoregressive, Bilinear Model, Conditionally Heteroscedasticity

باوسنز و همکاران^{۱۳} (۲۰۰۶)، بیرا و هایگینس^{۱۴} (۱۹۹۳)، بولرسلی و همکاران^{۱۵} (۱۹۹۲)، بولرسلی و همکاران^{۱۶} (۱۹۹۴)، دگیاناکیز و زیکالاکی^{۱۷} (۲۰۰۴)، انگل و پتون^{۱۸} (۲۰۰۱)، پیگن^{۱۹} (۱۹۹۶)، پالم^{۲۰} (۱۹۹۶) و شیرد^{۲۱} (۱۹۹۶) اشاره کرد. خلیلی و همکاران (۱۳۹۱) با استفاده از الگوهای ترکیبی BL-ARCH دبی روزانه رودخانه شهرچای ارومیه را به مدت ۱۱ سال پیش‌بینی و مدل‌سازی کردند. مطالعات انجام یافته در زمینه علوم مرتبط با هیدرولوژی و منابع آب برای تحلیل سری‌های زمانی و ترکیب مدل‌های خطی و غیرخطی اندک است. با این حال در اینجا به برخی از مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌گردد. تول^{۱۹} (۱۹۹۶) از ترکیب مدل AR(2) و GARCH برای برازش داده‌های روزانه درجه حرارت و واریانس شرطی ناحیه دی‌بیلت در هلند استفاده کرد. او واریانس شرطی یک مشاهده را به‌طور خطی به واریانس شرطی مشاهدات قبلی ارتباط داد. نامبرده از مدل GARCH(1,1) برای مدل‌سازی سری زمانی استفاده نمود و نشان داد که در مدل مذکور واریانس شرطی در زمان t به خطای تخمینی و واریانس نظیر در زمان $t-1$ بستگی دارد. تیلور و بویرا^{۲۱} (۲۰۰۴) نتایج پیش‌بینی چگالی درجه حرارت پنج ایستگاه هواشناسی در انگلیس را با استفاده از مدل GARCH و مدل‌های اتمسفری مورد مقایسه قرار دادند. نتایج این تحقیق نشان داد که مدل GARCH نسبت به مدل‌های اتمسفری نتایج بهتری ارائه می‌کند. وانگ و همکاران^{۲۱} (۲۰۰۵) از ترکیب مدل ARMA و مدل GARCH برای برازش واریانس و میانگین روزانه جریان رودخانه زرد در چین استفاده کرد. نتایج این مطالعه نشان داد که مدل ARMA-GARCH نتایج بسیار سودمندی در مدل‌سازی سری روزانه جریان رودخانه ارائه می‌کند. کومورنیک و همکاران^{۲۲} (۲۰۰۶) عملکرد مدل‌های غیرخطی سری زمانی را در پیش‌بینی فرآیندهای هیدرولوژیکی مورد مقایسه قرار دادند. هدف مطالعه حاضر مقایسه مدل‌های تلفیقی خطی - غیرخطی (ARMA-ARCH) و غیرخطی - غیرخطی (BL-ARCH) در مدل‌سازی تراز سطح آب دریاچه ارومیه می‌باشد.

مقدمه

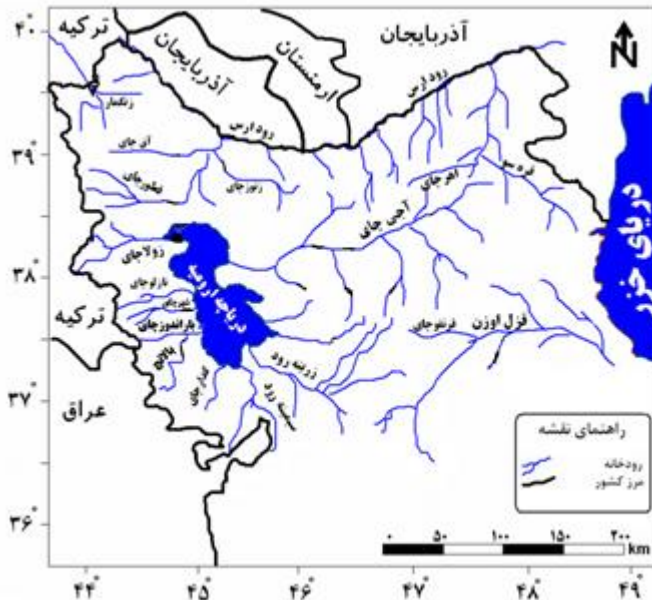
بسیاری از فرآیندهای مربوط به دستگاه‌های طبیعی نسبت به زمان غیرخطی بوده اگرچه جنبه‌های خاصی از این سامانه‌ها ممکن است نسبت به جنبه‌های دیگر به فرآیند خطی نزدیک‌تر باشند. به هر حال ماهیت غیرخطی بودن برای ما کاملاً آشکار نیست (تسونیس^۱، ۲۰۰۱). به همین دلیل به نظر می‌رسد با ترکیب مدل‌های خطی و غیرخطی، می‌توان نتایج مدل‌سازی‌های هیدرولوژیکی را افزایش داد. تعداد مطالعات مربوط به مدل‌های غیرخطی سری‌های زمانی در تحلیل و پیش‌بینی در مقایسه با سری‌های زمانی خطی بسیار اندک است. به‌طوری که به نظر می‌رسد، تاکنون در ایران مطالعه‌ای در زمینه کاربرد مدل‌های غیرخطی و تلفیق آن با مدل‌های خطی سری زمانی فرآیندهای هیدرولوژیکی صورت نگرفته و در سطح جهانی نیز مطالعات مزبور انگشت‌شمار بوده است. سوپارائو^۲ (۱۹۸۱) مدل BL(p,0,p,1) را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و به نتایج جالبی در رابطه با خصوصیات سری‌های زمانی دست یافت. سوپارائو و گاب^۳ (۱۹۸۴) روی برخی خصوصیات و کاربردهای این مدل مباحثی انجام داده و نمایش ماتریسی و فضایی این مدل را ارائه نمودند. فام^۴ (۱۹۹۳) تحقیقی روی خصوصیات پایه و محاسبات آماری مدل‌های دوخطی انجام داد. محققانی مانند کیم و همکاران^۵ (۱۹۹۰)، چن و لیو^۶ (۱۹۹۱) و سیسی و سوپارائو^۷ (۱۹۹۲) برای تخمین پارامترهای مدل دوخطی مطالعه‌ای انجام دادند. دای و بیلارد^۸ (۲۰۰۳) مشکل تخمین پارامترهای مدل فضایی دوخطی را مورد توجه قرار داده و با فرض ایستا بودن سری، روشی به نام تخمین شرطی حداکثر درست‌نمایی با استفاده از الگوریتم عددی نیوتن رافسون، برای تخمین پارامترهای مدل ارائه نمودند. لیفشیتس^۹ (۲۰۰۶) منشأ تغییرات مدل دوخطی در سری‌های زمانی با ماهیت غیرخطی ضعیف را مورد تحقیق قرار داد و به روابط و معادله‌های ریاضی حاکم بر این شرایط دست یافت. مطالعات زیادی در مورد مدل‌های ARCH بعد از انگل^{۱۰} (۱۹۸۲) انجام گردید که به‌عنوان مثال می‌توان به تحقیقات اندرسون و بولرسل^{۱۱} (۱۹۹۸)، اندرسون و همکاران^{۱۲} (۲۰۰۶)،

13 - Bauwens *et al.*
14 - Bera and Higgins
15 - Bollerslev *et al.*
16 - Bollerslev *et al.*
17 - Degiannakis and Xekalaki
18 - Engle and Patton
19 - Pagan
20 - Palm
21 - Shephard
19 - Tol
20 - Taylor and Buizza
21 - Wang *et al.*
22 - Komornik *et al.*

1 - Tsonis
2 - Subba Rao
3 - Subba Rao and Gabr
4 - Pham
5 - Kim *et al.*
6 - Chen and Liu
7 - Sesay and Subba Rao
8 - Dai and Billard
9 - Lifshits
10 - Engle
11 - Andersen and Bollersle
12 - Andersen *et al.*

جدول ۱- مشخصات آماری سری زمانی تراز سطح آب دریاچه ارومیه

دوره آماری (سال)	بیشینه تراز سالانه (متر)	کمینه تراز سالانه (متر)	متوسط تراز سالانه (متر)
۱۳۵۲-۹۰	۱۲۷۷/۹۵	۱۲۷۰/۹۳	۱۲۷۵/۱۰۳



شکل ۱- موقعیت جغرافیایی منطقه مورد مطالعه

ساده‌ترین نوع مدل‌های سری زمانی از نوع خود همبسته^۴ می‌باشند که بر اساس زنجیره مارکوف بنا نهاده شده‌اند. یک سری زمانی وقتی از زنجیره مارکوف تبعیت می‌کند که هر رخدادی در زمان t با زمان‌های قبل و بعد از خود مرتبط باشد. از دیگر مدل‌های سری زمانی می‌توان به مدل‌های خود همبسته با میانگین متحرک^۵ و آریما^۶ اشاره نمود (ناظری تهرودی و همکاران، ۱۳۹۲). با در نظر گرفتن سری زمانی نرمال و استاندارد Z_t ، مدل میانگین متحرک خودهمبسته $ARMA(p,q)$ به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Z_t = \sum_{i=1}^p (\phi_i Z_{t-i}) - \sum_{j=1}^q (\theta_j \varepsilon_{t-j}) + \varepsilon_t \quad (1)$$

که در آن p : مرتبه مدل AR ، q : مرتبه مدل MA ، ϕ_i و θ_j : ضرایب مدل و ε_t : سری تصادفی و نرمال مدل با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 می‌باشد (خلیلی و همکاران، ۲۰۱۳).

مواد و روش‌ها

منطقه مورد مطالعه

منطقه مورد مطالعه در این تحقیق، دریاچه ارومیه است. حوضه آبریز دریاچه ارومیه یکی از مهم‌ترین حوضه‌های منطقه‌ای ایران است که در بخش شمال غرب ایران واقع شده است. این حوضه با وسعتی برابر ۵۲۷۰۰ کیلومترمربع و مساحتی معادل ۳/۲۱ درصد مساحت کل کشور، بین مدار ۳۵ درجه و ۴۰ دقیقه تا ۳۸ درجه و ۲۹ دقیقه عرض شمالی و نصف‌النهار ۴۴ درجه و ۱۳ دقیقه تا ۴۷ درجه و ۵۳ دقیقه طول شرقی قرار گرفته است. در این مطالعه از داده‌های سری زمانی تراز سطح آب دریاچه ارومیه در دوره آماری ۹۱-۱۳۵۲ استفاده شد. شکل (۱)، موقعیت منطقه مورد مطالعه و جدول (۱)، مشخصات آماری داده‌ها را نشان می‌دهد.

مدل‌های ARMA

سری زمانی اولین بار در هیدرولوژی از اوایل دهه ۱۹۶۰ توسط توماس و فیرینگ^۱ (۱۹۶۲) و یوجویچ^۲ (۱۹۶۳) آغاز گردید و در دهه ۱۹۷۰ توسط باکس و جنکین^۳ (۱۹۷۶) توسعه یافت.

4 -Auto Regressive (AR)
 5 -Auto Regressive Moving Average (ARMA)
 6- Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA)
 7 - Khalili et al.

1 -Thomas and Fiering
 2 -Yevjevich
 3 - Box and Jenkins

حاصل ضرب دو متغیر ε_t و X_t که هر دو نسبت به زمان متغیرند، باعث شده معادله از حالت خطی خارج شده و مدل غیرخطی شود. شاید یکی از بهترین راه‌ها برای معرفی مدل‌های غیرخطی سری زمانی اضافه کردن یک عبارت به مدل خطی باشد که این عمل در مدل دوخطی مشاهده می‌گردد (فان و یائو، ۲۰۰۳). اگر بخواهیم مدل دوخطی را به همان روال قبلی مدل‌های خطی سری زمانی نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$Z_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_i \cdot Z_{t-i}) - \sum_{j=1}^q (\theta_j \cdot \varepsilon_{t-j}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s (\beta_{ij} \cdot Z_{t-i} \cdot \varepsilon_{t-j}) + \varepsilon_t \quad (4)$$

که در این مدل پارامترها مانند مدل ARMA بوده و فقط عبارت $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s (\beta_{ij} \cdot Z_{t-i} \cdot \varepsilon_{t-j})$ به آن اضافه شده است. (p, q, r, s) رسته مدل و j, q, b نیز ضرایب مدل دوخطی می‌باشند که در این تحقیق و در بخش نتایج و بحث از این علائم برای نمایش نتایج مدل دوخطی استفاده شده است.

نمایش مارکوفی

یکی از روش‌های ساده برای نمایش پیچیدگی مدل‌های غیرخطی دوخطی استفاده از نمایش فضایی است. بدین شکل که ضرایب مدل خودهمبستگی با مرتبه یک به‌عنوان یک بردار در نظر گرفته شوند که این همان زنجیره مارکوف می‌باشد (فان و یائو، ۲۰۰۳). زیرا بر اساس تعریف یک سری زمانی از زنجیره مارکوف تبعیت می‌کند اگر هر واقعه ثبت‌شده سری زمانی در زمان t با زمان قبل و بعد از خود مرتبط باشد (کارآموز و عراقی نژاد، ۱۳۸۴). به همین دلیل این نمایش، نمایش مارکوفی نامیده می‌شود و خصوصیات مدل دوخطی را می‌توان از این نمایش استنتاج نمود. مدل دوخطی را به‌صورت زیر در نظر گرفته:

$$X_t = \sum_{j=1}^p (b_j \cdot X_{t-j}) - \sum_{k=1}^q (\alpha_k \cdot \varepsilon_{t-k}) + \sum_{j=0}^p \sum_{k=1}^q (C_{jk} \cdot X_{t-j-k} \cdot \varepsilon_{t-k}) + \varepsilon_t \quad (5)$$

برای مقادیر $i, j \geq 1$ مقدار $n = \max\{p, P+q, P+Q\}$ و $m = n - 1$ $\max\{q, Q\}$ را در نظر گرفته و فرض می‌شود، $b_{q+j} = a_{q+j} = c_{p+i}$ بوده و $Q+j=0$ باشد. فام (۱۹۹۳) نشان داد که X_t را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$X_t = h^T Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

مدل دوخطی^۱

این مدل توسط گرانگر و آندرسون^۲ (۱۹۷۸) معرفی شد و تحقیقات فراوانی پس از آن روی این مدل به عمل آمد. مدل‌های غیرخطی بیشتر در علوم مرتبط با آمار، تحقیقات مرتبط با آمار، اقتصاد و ریاضیات مورد بحث قرار گرفته و توسعه یافته‌اند که می‌توان به منابعی نظیر پریستلی^۳ (۱۹۸۸) و تانگ^۴ (۱۹۹۰) مراجعه نمود. اکثر این مدل‌ها در زمینه مدل‌سازی و پیش‌بینی سری‌های زمانی اقتصادی کاربرد داشته‌اند (فرانسیس و ون دیک^۵، ۲۰۰۲).

مدل‌های خطی سری زمانی در واقع بسط مرتبه اول سری‌های تیلور^۶ می‌باشند (تسای، ۲۰۰۲). ایده اصلی مدل دوخطی نیز غیرخطی بودن بسط مرتبه دوم سری تیلور می‌باشد. شکل کلی مدل دوخطی به‌صورت زیر توصیف می‌شود (تسای، ۲۰۰۲):

$$X_t = \sum_{j=1}^p (b_j \cdot X_{t-j}) - \sum_{k=1}^q (a_k \cdot \varepsilon_{t-k}) + \sum_{j=0}^p \sum_{k=1}^q (c_{jk} \cdot X_{t-j-k} \cdot \varepsilon_{t-k}) + \varepsilon_t \quad (2)$$

که در آن X_t : سری زمانی موردنظر و p, q, P و Q : اعداد صحیح مثبت می‌باشند که رسته یا مرتبه مدل دوخطی را نشان می‌دهند. مدل فوق در برخی منابع مانند (فان و یائو، ۲۰۰۳)، به‌صورت مدل $BL(p, q, P, Q)$ نیز نمایش داده می‌شود. a, b و c ضرایب مدل دوخطی می‌باشند. ε_t : نیز سری تصادفی نرمال و استاندارد می‌باشد. به‌عنوان نمونه در صورتی که مقادیر رسته مدل دوخطی $P=Q=p=q=1$ باشد، مدل دوخطی به‌صورت $BL(1,1,1,1)$ نمایش داده شده و می‌توان به‌صورت زیر نوشت که در آن، ε_t : سری تصادفی مستقل با توزیع نرمال و استاندارد است:

$$BL(1,1,1,1) = X_t = b \cdot X_{t-1} - a \cdot \varepsilon_{t-1} + c \cdot X_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

مدل دوخطی در واقع مدل ARMA (خطی) بسط داده شده می‌باشد که عبارت غیرخطی $\sum_{i=0}^p \sum_{k=1}^q (C_{jk} \cdot X_{t-j-k} \cdot \varepsilon_{t-k})$ به سمت راست آن اضافه شده است (آینکاران^۸، ۲۰۰۴). در این عبارت

- 1 - Bilinear Models (BL)
- 2 - Granger and Andersen
- 3 - Priestley
- 4 - Tong
- 5 - Franses and Van Dijk
- 6 - Taylor Series
- 7 - Tsay
- 8 - Fan and Yao
- 9 - Ainkaran

حالت ایستا تبدیل شده‌اند. فرض می‌شود $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T$ باشد که در آن:

$$\begin{aligned} q_1 &= (b_1, K b_p, a_1, K, a_q)^T \\ \theta_2 &= (c_{11}, K c_{1s}, c_{21}, K, c_{rs})^T \end{aligned} \quad (11)$$

می‌توان تابع لگاریتم درست‌نمایی (ضمنی)^۱ را به صورت زیر نوشت (فان و یائو، ۲۰۰۳):

$$\begin{aligned} l(\theta, \sigma^2) &= -\frac{N-P'}{2} \log \sigma^2 \\ &- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p'+1}^T \hat{\varepsilon}_t^2(\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن $p' = \text{Max}\{p, P\}$ و مقادیر $\hat{\varepsilon}_t(\theta), \hat{\varepsilon}_{p'+1}(\theta), \dots$ در نظر گرفتن شرایط $q' = \max\{q, Q\}$ و با استفاده از مدل عمومی دوخطی قابل محاسبه خواهند بود.

مدل‌های خودهمبسته با واریانس شرطی^۲

این مدل برای اولین بار در مطالعات اقتصادی توسط انگل (۱۹۸۲) ارائه شد و اولین مدلی است که یک چارچوب نظام‌مند را برای مدل‌سازی نوسانات فراهم می‌کند. ایده اصلی مدل‌های خودهمبسته با واریانس شرطی به دو صورت است که (الف) میانگین اصلاح شده داده‌های مورد استفاده مجزا اما وابسته است و (ب) مدل وابسته است و می‌تواند توسط یک تابع ساده درجه دوم از مقادیر قبل از آن شرح داده شود. به‌طور خلاصه، مدل مدل‌های خودهمبسته با واریانس شرطی به صورت زیر فرض می‌شود (انگل، ۱۹۸۲):

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m b_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (13)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (14)$$

که در آن σ_t^2 واریانس شرطی، ε_t سری زمانی نظیر عبارت خطا یا باقی‌مانده مدل با میانگین صفر و واریانس ۱ است، $b_0 \geq 0$ و $a_0 \geq 0$ پارامترهای مدل، m برابر با مرتبه مدل و Z_t سری زمانی پارامتر موردنظر است (انگل، ۱۹۸۲).

ساختار مدل مدل‌های خودهمبسته با واریانس شرطی

برای درک بهتر مدل، ساختار مدل ARCH(1) در نظر گرفته شد

$$Z_t = (A + B\varepsilon_t)Z_{t-1} + c\varepsilon_t + d\varepsilon_t^2 \quad (7)$$

که در آن متغیر فضایی Z_t : بردار با ابعاد $n \times 1$ با X_{t-m-i} داده شامل X_{t-1}, X_{t-2}, \dots می‌باشد، h : یک بردار $n \times 1$ با $(m+1)$: c : بردار با ابعاد $n \times 1$ با $m-1$ داده، d : بردار با ابعاد $n \times 1$ با m داده و B : بردار با ابعاد $n \times 1$ به صورت ماتریس زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} C_{m,1} & \dots & C_{0,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,n-m} & \dots & C_{0,n-m} \end{pmatrix} \quad (8)$$

A : بردار با ابعاد $n \times n$ و تعداد $(i, i+1)$ عضو بوده که $i=1, \dots, n-1$ می‌باشد. این معادله مشابه مدل AR(1) با ضرایب تصادفی می‌باشد. بنابراین در این معادله Z_{t-1} مستقل از ضرایب $(A+B\varepsilon_t)$ و $(c\varepsilon_t + d\varepsilon_t^2)$ می‌باشد. در نتیجه با در نظر گرفتن اینکه Z_t یک زنجیره مارکوف می‌باشد، می‌توان مدل دوخطی را به صورت زیر ارائه نمود (فان و یائو، ۲۰۰۳):

$$X_t = h^T Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

$$Z_t = A(\varepsilon_t)Z_{t-1} + c(\varepsilon_t) \quad (10)$$

که در آن Z_t : بردار فضایی تعریف شده و h : یک بردار ثابت و $A(\varepsilon_t)$ و $C(\varepsilon_t)$: به ترتیب ماتریس ثابت و توابع برداری می‌باشند (فان و یائو، ۲۰۰۳).

تخمین پارامترهای مدل دوخطی به روش حداکثر درست‌نمایی

برآزش مدل سری زمانی غیرخطی دوخطی شامل دو جنبه مهم است: یکی تعیین رسته یا مرتبه‌های مدل شامل (p, q, r, s) و دیگری تخمین ضرایب مدل شامل مقادیر φ, θ, β می‌باشد. تعیین رسته مدل با استفاده از روش‌های شناخته شده مانند معیار آکائیکه انجام می‌گیرد. مقدار آکائیکه برای رسته‌های مختلف محاسبه شده و هر رسته که مقدار آکائیکه کمتری داشته باشد، به‌عنوان رسته مدل انتخاب خواهد شد. البته هنوز عملکرد این روش‌ها در مدل دوخطی بررسی نشده و ناشناخته می‌باشد که این موضوع به دلیل فقدان ارائه تئوری تخمین حداکثر درست‌نمایی برای مدل‌های دوخطی می‌باشد (فان و یائو، ۲۰۰۳).

در این مطالعه رسته مدل مورد بررسی با استفاده از نرم‌افزار SAMS2007 و ضرایب مدل به روش سعی و خطا محاسبه گردید. با داشتن رسته مدل دوخطی (p, q, r, s) می‌توان از روش استاندارد تابع تخمین درست‌نمایی برای تخمین ضرایب مدل استفاده کرد. فرض می‌گردد Z_1, \dots, Z_T سری داده‌های مشاهداتی باشند که به

1 - Conditional Log Likelihood Function

2 - Autoregressive Conditional Heteroscedastic

ناظری تهرودی و همکاران: ارزیابی مدل‌های تلفیقی ARMA-ARCH و BL-ARCH در...

(انگل، ۱۹۸۲). عدد ۱ برابر با مرتبه مدل ARCH است:

$$m_4 = E(a_t^4) \quad (۱۵)$$

$$m_4 = 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \text{Var}(a_t) + \alpha_1^2 m_4) \quad (۲۳)$$

$$= 3\alpha_0^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4 \quad (۱۶)$$

در نهایت: شرطی a_t را برابر صفر در نظر گرفت. زیرا:

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \quad (۲۴)$$

$$E(a_t) = E[E(a_t | F_{t-1})] = E[\sigma_t E(\varepsilon_t)] = 0 \quad (۱۷)$$

که در آن $a_1 \geq 0$ و $a_0 \geq 0$ است. ابتدا باید میانگین سپس واریانس شرطی از رابطه زیر به دست آمد (انگل، ۱۹۸۲):

که در آن m_4 برابر با گشتاور چهارم (α_t) ، $b_0 \geq 0$ و $a_0 \geq 0$ پارامترهای مدل ARCH(1) هستند.

ارزیابی مدل‌ها

به منظور ارزیابی عملکرد مدل از دو معیار ضریب تبیین و جذر میانگین مربعات خطا استفاده گردید. مدلی که کمترین مقدار جذر میانگین مربعات خطا و یا بیشترین مقدار ضریب همبستگی را داشته باشد به عنوان مدل مطلوب شناخته شد:

$$\text{RMSE} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q}_i)^2}{n} \right]^{0.5} \quad (۲۵)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (Q_i - \bar{Q}_i)^2}{\sum (Q_i - \bar{Q}_i)^2} \quad (۲۶)$$

که در روابط فوق، Q_i ، \bar{Q}_i و \bar{Q} به ترتیب دبی جریان مشاهداتی، دبی جریان محاسباتی، میانگین دبی جریان و n : تعداد داده‌ها می‌باشد.

نتایج و بحث

سری زمانی ۴۰ ساله تراز سطح آب دریاچه ارومیه در مقیاس سالانه با استفاده از آزمون‌های اولیه مورد بررسی قرار گرفتند و نتایج بررسی اولیه داده‌ها نشان از وجود روند در داده‌های سری زمانی تراز سطح آب دریاچه بود. همچنین نتایج نشان دهنده عدم همگنی و عدم تصادفی بودن داده‌ها بود. نمودار سری زمانی اولیه و نتایج اولیه داده‌ها به شرح شکل (۲) ارائه شد. برای بررسی کفایت طولی داده‌های مورد استفاده از آزمون هرست استفاده گردید. نتایج بررسی آزمون کفایت طولی هرست نشان داد که داده‌های مورد استفاده دارای ضریب $H=0.916$ بوده و داده‌های مورد استفاده کفایت طولی مناسب را دارند.

$$\text{Var}(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2 | F_{t-1})] = \quad (۱۸)$$

$$E[\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$$

از آنجا که a_t با توجه به $E(a_t) = 0$ ، $\text{Var}(a_t) = E(a_{t-1}^2) = E(a_{t-1}^2)$ یک فرآیند ایستا و ثابت است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{Var}(a_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Var}(a_t) \quad (۱۹)$$

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1)} \quad (۲۰)$$

از آنجا که واریانس α_t باید مثبت باشد، در نتیجه محدوده α_1 باید بین ۰ و ۱ باشد. در برخی از برنامه‌های کاربردی، مقادیر بالاتر از (α_t) نیز باید وجود داشته باشد و از این رو، α_1 باید برخی از گشتاورهای اضافی را تأمین کند. به عنوان مثال، در مطالعه رفتار دنباله‌ها، نیاز است که گشتاور چهارم (α_t) نیز محدود شود. با فرض نرمال بودن ε_t در معادله زیر خواهیم داشت (انگل، ۱۹۸۲):

$$E(a_t^4 | F_{t-1}) = 3[E(a_t^2 | F_{t-1})]^2 \quad (۲۱)$$

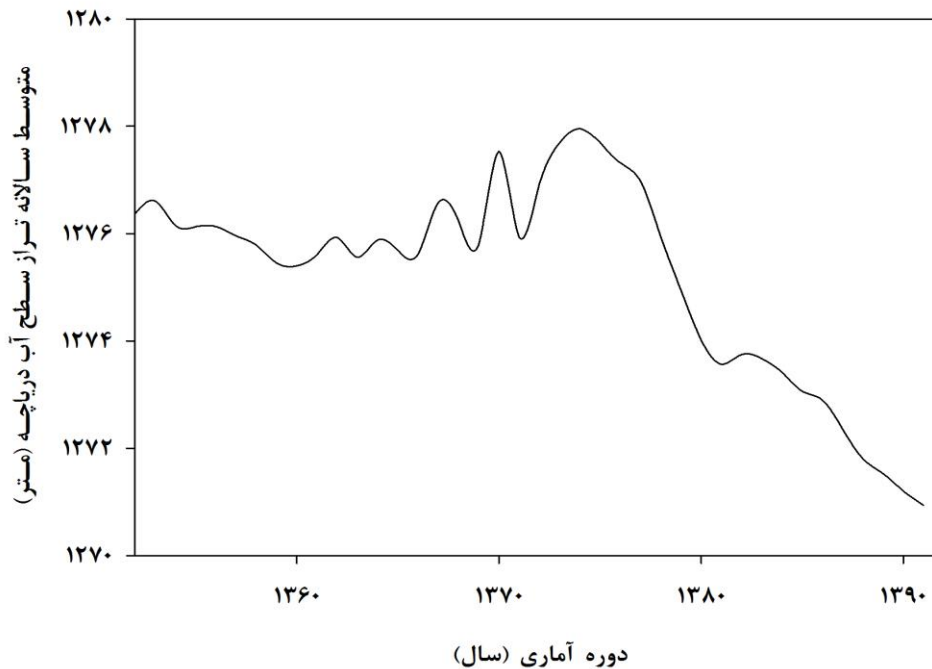
$$= 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2$$

بنابراین:

$$E(a_t^4) = E[E(a_t^4 | F_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 \quad (۲۲)$$

$$= 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4)$$

اگر α_t به عنوان ثابت چهارم در نظر گرفته شود و



شکل ۲- نمودار داده‌های اولیه متوسط سالانه تراز سطح آب دریاچه ارومیه در دوره آماری

جدول ۲- پارامترهای مدل آرما

مدل	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Θ_1	Θ_2	Θ_3	آکاییکه
ARMA(3,3)	-۰/۶۳۹	۰/۶۰۶	۰/۲۸۲	-۰/۱۴۷	۰/۲۷۳	-۰/۳۱۶	۲/۰۱۲
ARMA(1,0)	۰/۷۵۶						۱۰/۴۰۱
ARMA(2,0)	۰/۸۱۹	۰/۰۴۳					۸/۱۲۳
ARMA(2,3)	۰/۸۸۶	-۰/۱۲۲		۰/۰۹۳	-۰/۲۳۲	-۰/۲۶۱	۳/۱۴۰

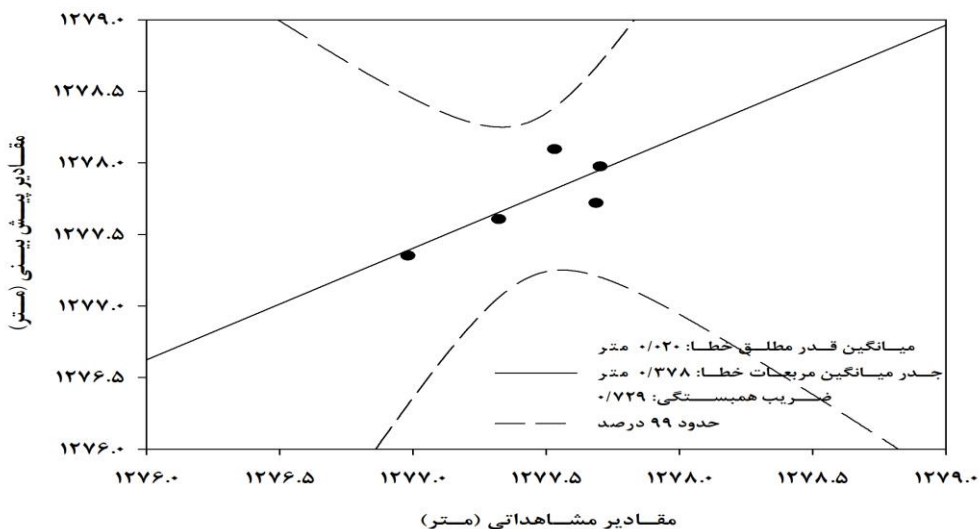
علاوه بر معیار آکاییکه، برای بررسی و صحت سنجی دقت مدل منتخب از داده‌های ۵ سال انتهایی دوره آماری استفاده شد. به طوری که پنج سال داده‌های انتهایی دوره آماری از سری زمانی اولیه تراز سطح آب دریاچه ارومیه حذف و سپس با استفاده از مدل منتخب مدل‌سازی و پیش‌بینی گردید. نتایج بررسی و صحت سنجی مدل منتخب به صورت شکل (۳) ارائه گردید. همچنین برای اطمینان بیشتر از دقت مدل منتخب، علاوه بر در نظر گرفتن داده‌های پنج سال انتهایی دوره آماری، از داده‌های ده سال دوره آماری نیز استفاده شد. نتایج بررسی دقت و خطای مدل مورد استفاده با استفاده از داده‌های ده سال انتهایی دوره آماری مورد مطالعه به شرح شکل (۴) ارائه گردید. نتایج بررسی دقت مدل مورد بررسی نشان داد که تمامی داده‌های مدل شده در محدوده اطمینان ۹۵ درصد قرار داشته و دقت مدل مورد تأیید است. در نهایت بعد از تأیید دقت مدل مورد بررسی، با استفاده از مدل مذکور، تراز سطح آب دریاچه ارومیه در مقیاس سالانه مدل‌سازی و نتایج به شرح شکل (۵) ارائه گردید.

برای از بین بردن روند از روش تفاضل گیری استفاده شد. به این صورت که داده‌ها به ترتیب نزولی مرتب‌شده و هر داده از داده ماقبل خود کسر می‌شود، لذا روند داده‌های سری زمانی از بین رفت. نتایج نشان داد که داده‌های بدون روند با استفاده از تابع تبدیل $y = \ln(x+a)$ و با ضرایب $a = 0.0145$ و به ازای ضریب چولگی -0.167 به شکل مناسبی نرمال می‌شوند. پس از بررسی اولیه داده‌ها، نتایج بررسی مدل‌های مختلف از بین مدل‌های خانواده آرما نشان داد که با توجه به معیار آکاییکه کمتر، مدل $ARMA(3,3)$ از بین مدل‌های خانواده آرما بهترین مدل برای مدل‌سازی داده‌های مورد مطالعه خواهد بود. پارامترهای مدل مذکور به شرح جدول (۲) ارائه گردید.

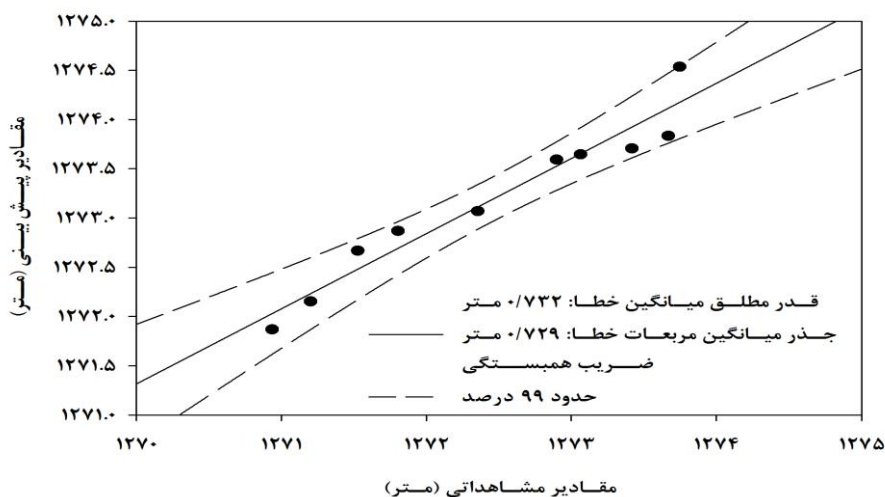
با توجه به جدول (۲) و معیار آکاییکه، مدل $ARMA(3,3)$ به عنوان مدل برتر شناخته شد و رابطه آن به صورت رابطه (۲۵) ارائه گردید.

$$ARMA(3,3): Z_t = [(\phi_1 Z_{t-1}) + (\phi_2 Z_{t-2}) + (\phi_3 Z_{t-3})] - [(\theta_1 \varepsilon_{t-1}) + (\theta_2 \varepsilon_{t-2}) + (\theta_3 \varepsilon_{t-3})] + \varepsilon_t \quad (25)$$

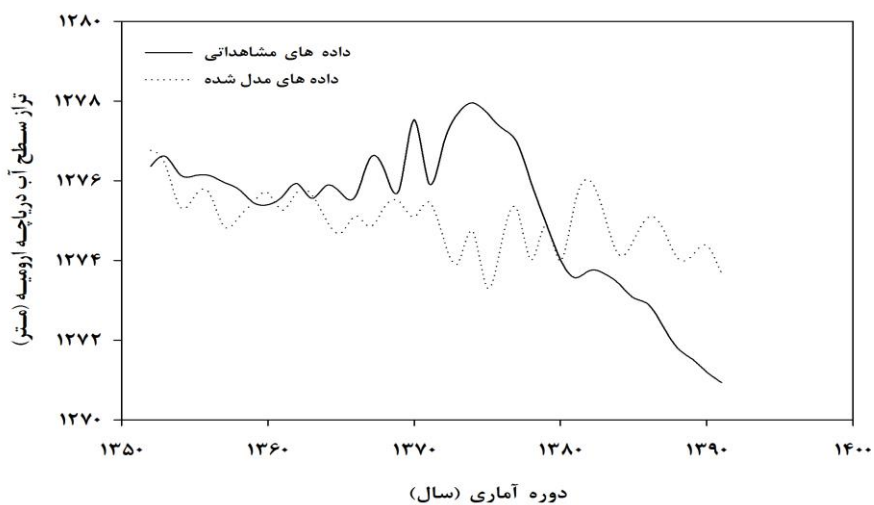
ناظری تهرودی و همکاران: ارزیابی مدل‌های تلفیقی ARMA-ARCH و BL-ARCH در...



شکل ۳- نتایج بررسی و صحت سنجی مدل AR(3,3) در دوره آماری ۹۰-۱۳۸۶.



شکل ۴- نتایج بررسی و صحت سنجی مدل AR(3,3) در دوره آماری ۹۰-۱۳۸۱.

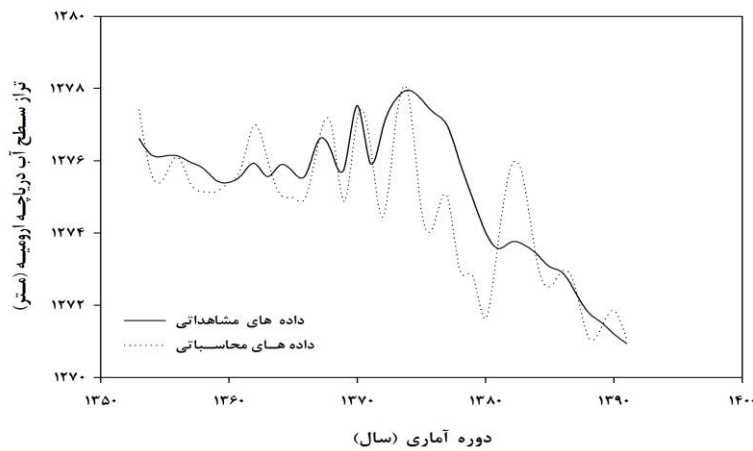


شکل ۵- مدل سازی تراز آب دریاچه ارومیه با استفاده از مدل ARMA(3,3)

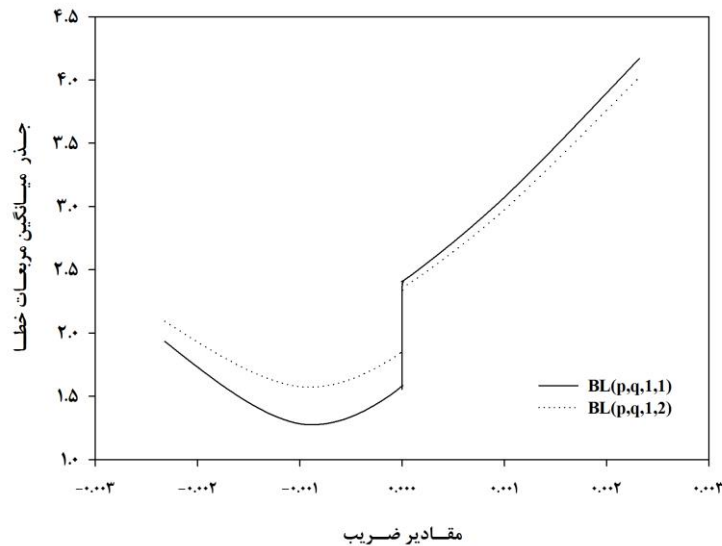
شرح شکل (۶) ارائه گردید. هم‌چنین نتایج استخراج ضریب مدل به‌صورت شکل (۷) ارائه گردید.

مدل‌سازی با استفاده از مدل دو خطی نیز نتایج مشابه مدل آرما ارائه کرد. دقت ارزیابی مدل دوخطی نیز همانند مدل خطی خانواده آرما با استفاده از دو آزمون همبستگی و جذر میانگین مربعات خطا محاسبه گردید. برای محاسبه ضریب همبستگی مدل‌ها از پنج سال داده انتهایی دوره آماری استفاده شد. خلاصه نتایج بررسی همبستگی بین داده‌های محاسباتی و مشاهداتی و میانگین جذر مربعات خطا، به‌صورت جدول (۳) ارائه گردید.

با توجه به شکل‌های (۳) و (۴) می‌توان مشاهده کرد که در مرحله صحت‌سنجی نتایج مدل $ARMA(3,3)$ قابل قبول بوده ولی با توجه به شکل (۵) می‌توان دید که نتایج قابل قبولی از مدل‌سازی تراز سطح آب دریاچه با استفاده از مدل خانواده آرما حاصل نشد. بعد از مدل‌سازی تراز سطح آب دریاچه ارومیه با استفاده از مدل $ARMA(3,3)$ ، داده‌های موردنظر با استفاده از مدل دوخطی برازش داده شدند و به ازای مقدار ضریب b_{11} برابر با $-0/001$ مدل $BL(3,3,1,1)$ به‌عنوان مدل برتر شناخته شد و تراز سطح آب دریاچه ارومیه، با استفاده از مدل مذکور، مدل‌سازی شد. نتایج مدل‌سازی تراز سطح آب دریاچه ارومیه با استفاده از مدل مذکور به



شکل ۶ - مدل‌سازی تراز آب دریاچه ارومیه با استفاده از مدل $BL(3,3,1,1)$



شکل ۷ - تعیین مقادیر ضریب مدل دوخطی

جدول ۳- نتایج بررسی صحت‌سنجی مدل‌های مورد استفاده (حذف پنج سال داده انتهایی دوره آماری)

مدل	ضریب همبستگی	میانگین جذر مربعات خطا
$ARMA(3,3)$	۰/۷۰۷	۲/۸۳۶
$BL(3,3,1,1)$	۰/۶۱۸	۴/۳۰۹

ناظری تهرودی و همکاران: ارزیابی مدل‌های تلفیقی ARMA-ARCH و BL-ARCH در...

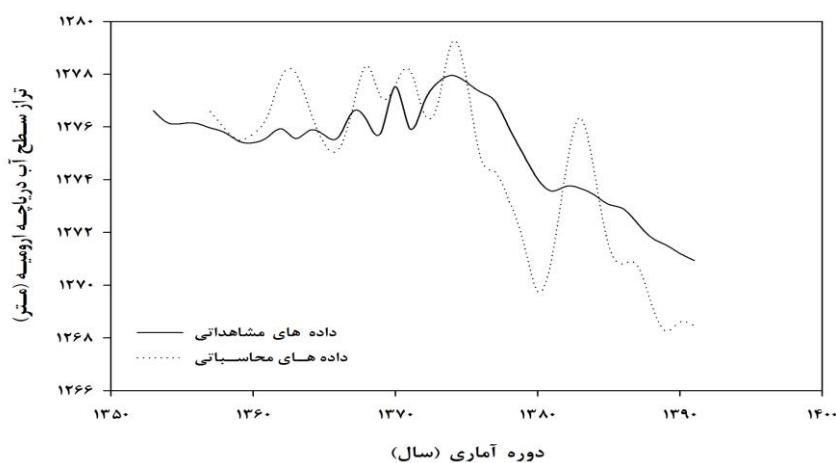
خودهمبسته با میانگین متحرک، به ترتیب به صورت روابط (۲۶) و (۲۷) ارائه گردید:

$$\sigma_t^2 = 0.8980135 + 2.63 * 10^{-8} \epsilon_{t-1}^2 \quad (26)$$

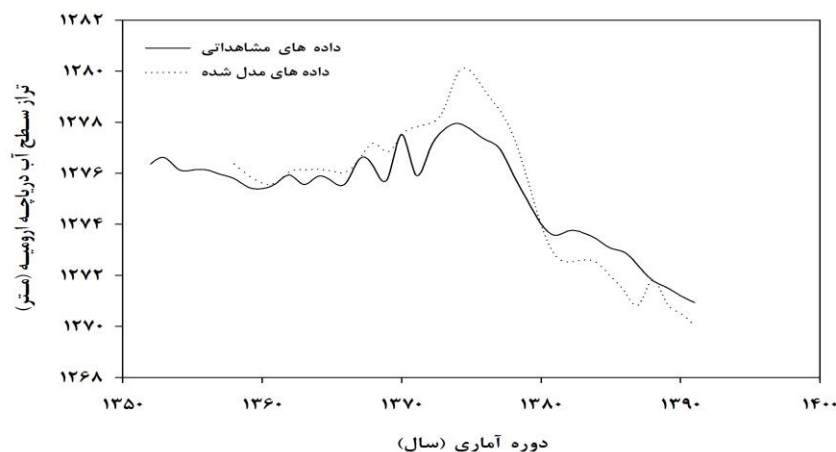
$$\sigma_t^2 = 0.5366492 + 0.113591 \epsilon_{t-1}^2 \quad (27)$$

سرانجام دو مدل مذکور با استفاده از سری باقی‌مانده تولید شده ترکیب شدند و مدل‌های BL-ARCH و ARMA-ARCH تولید شد. نتایج مدل‌سازی مدل‌های تلفیقی BL-ARCH و ARMA-ARCH به ترتیب به شرح شکل‌های (۸) و (۹) ارائه گردید.

نتایج ارزیابی مدل‌ها نشان داد که با توجه به معیار خطا، مدل BL(3,3,1,1) و با توجه به ضریب همبستگی، مدل ARMA(3,3) به‌عنوان مدل مناسب برای مدل‌سازی و پیش‌بینی تراز سطح آب دریاچه ارومیه شناخته شدند. بعد از بررسی مدل خودهمبسته با میانگین متحرک و مدل دو خطی، مدل‌های مذکور با استفاده از مدل‌های غیرخطی خودهمبسته با واریانس شرطی ترکیب و نتایج مورد بررسی قرار گرفت. سری باقی‌مانده هر دو مدل دو خطی و خودهمبسته با میانگین متحرک استخراج و با استفاده از روابط موجود واریانس سری باقی‌مانده محاسبه گردید و سپس با استفاده از واریانس و مقادیر مشاهداتی، سری باقی‌مانده متناسب با داده‌ها تولید گردید. رابطه واریانس سری باقی‌مانده مدل در دو مدل دو خطی و



شکل ۸- مدل سازی تراز آب دریاچه ارومیه با استفاده از مدل BL-ARCH



شکل ۹- مدل سازی تراز آب دریاچه ارومیه با استفاده از مدل ARMA-ARCH

جدول ۴- ارزیابی مدل‌های ترکیبی BL-ARCH و ARMA-ARCH

جذر میانگین مربعات خطا	ضریب همبستگی	مدل
۲/۰۳۱	۰/۷۹۲	ARMA-ARCH
۴/۴۱۱	۰/۷۰۴	BL-ARCH

خودهمبسته با میانگین متحرک و مدل غیرخطی دوخطی مورد برازش قرار گرفت. نتایج نشان داد که از بین دو مدل خطی $ARMA(3,3)$ و غیرخطی $BL(3,3,1,1)$ ، مدل غیرخطی $BL(3,3,1,1)$ با توجه به معیار همبستگی و مدل $ARMA(3,3)$ با توجه به معیار خطا مدل برتر برای مدل سازی تراز سطح آب دریاچه انتخاب شد. بعد از بررسی دو مدل ذکر شده، برای بررسی تأثیر مدل های واریانس شرطی بر نتایج مدل سازی مدل های ترکیبی، دو مدل خودهمبسته با میانگین متحرک و دوخطی با مدل های خودهمبسته با واریانس شرطی ترکیب شدند. نتایج نشان داد که ترکیب مدل های غیرخطی با مدل های واریانس شرطی، باعث افزایش نسبتاً کم خطای مدل و همچنین باعث افزایش مقدار همبستگی بین داده های مدل سازی شده و مشاهداتی در منطقه مورد مطالعه می شود. در مورد مدل خطی آرما، ترکیب مدل مذکور با مدل های واریانس شرطی، باعث بهبود نتایج مدل سازی و صحت سنجی شد. به طوری که در بین چهار مدل بررسی شده، نتایج محاسبه ضریب همبستگی و معیار خطا (جزر میانگین مربعات خطا) در مدل ترکیبی $ARMA-ARCH$ ، بالاتر از سایر مدل ها به دست آمد. همچنین نتایج نشان داد که در منطقه مورد مطالعه، ترکیب مدل های خطی با مدل های واریانس شرطی، دقت نتایج مدل سازی و صحت سنجی را افزایش می دهد در حالی که ترکیب دو مدل غیرخطی باعث کاهش دقت نتایج مدل سازی و صحت سنجی می شود. با توجه به نتایج مدل سازی داده های تراز سطح آب دریاچه ارومیه (شکل ۹) می توان مشاهده کرد که دقت مدل از سال تغییر روند کاهشی تراز سطح آب دریاچه ارومیه کاهش داشته است.

برای بررسی و صحت سنجی مدل ها همانند دو مدل خودهمبسته با میانگین متحرک و دو خطی، از پنج سال داده انتهایی دوره آماری استفاده شد و ضریب همبستگی بین داده های مشاهداتی و محاسباتی محاسبه گردید. برای بررسی دقت دو مدل نیز از معیار جزر میانگین مربعات خطا استفاده شد. نتایج بررسی همبستگی و معیار خطا دو مدل ترکیبی به صورت جدول (۴) ارائه گردید.

با توجه به نتایج ارزیابی دو مدل ترکیبی، مشخص گردید که از بین دو مدل مورد استفاده، مدل $ARMA-ARCH$ بین مدل های $ARMA-ARCH$ نتایج بهتری ارائه کرد. همچنین نتایج نشان داد تلفیق دو مدل غیرخطی باعث کاهش دقت مدل در مدل سازی تراز سطح آب دریاچه ارومیه خواهد شد. نتایج بررسی دو مدل دوخطی و $BL-ARCH$ نشان داد که با تلفیق مدل دوخطی با مدل غیرخطی خودهمبسته با واریانس شرطی، همبستگی بین داده های محاسباتی و مشاهداتی افزایش و خطای مدل نیز افزایش یافته است. خلیلی و همکاران (۱۳۹۱) در تحقیقات خود نشان دادند که تلفیق دو مدل دوخطی و خودهمبسته با واریانس شرطی باعث کاهش خطای مدل در مدل سازی دبی رودخانه نازلوچای می شود که نتایج تحقیق حاضر با تحقیقات ایشان مطابقت ندارد. دلیل این موضوع ممکن است به خاطر کاهش شدید روند تغییرات تراز سطح آب دریاچه ارومیه در سال های آتی باشد.

نتیجه گیری

با استفاده از داده های تراز سطح آب دریاچه ارومیه، چهار مدل خودهمبسته با میانگین متحرک، دوخطی، $ARMA-ARCH$ و $BL-ARCH$ مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا مدل خطی خانواده

منابع

- ۱- خلیلی، ک، فخری فرد، ا، دین پژوه، ی، احمدی، ف. و ج. بهمنش. ۱۳۹۱. معرفی و کاربرد الگوی تلفیقی پیشنهادی $BL-ARCH$ در پیش بینی دبی روزانه رودخانه (مطالعه موردی: رودخانه شهرچای ارومیه). نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)، ۲۷(۲): ۳۵۰-۳۴۲.
- ۲- کارآموز، م. و عراقی نژاد، ش. ۱۳۸۴. هیدرولوژی پیشرفته. انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر.
- ۳- ناظری تهرودی، م، احمدی، ف، خلیلی، ک. و ز. ناظری تهرودی. ۱۳۹۲. کاربرد نرم افزار SAMS 2007 در مدل سازی اقلیم آینده کردستان برای پیش بینی دما و بارندگی (مطالعه موردی: ایستگاه سینوپتیک سنندج). اولین کنفرانس هیدرولوژی مناطق نیمه خشک، جهاد دانشگاهی استان کردستان، سنندج.
- 4- Ainkaran, P. 2004. Analysis of some linear and nonlinear time series models. A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney.
- 5- Andersen, T. G. and T. Bollersle. 1998. ARCH and GARCH Models. in S. Kotz, C.B. Read and D.L. Banks (eds), Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol.II. New York: John Wiley and Sons.
- 6- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Christoffersen, P. and F. X. Diebold. 2006. Volatility and correlation forecasting. in C.W.J. Granger, G.Elliott and A. Timmermann (eds), Handbook of Economic Forecasting, 777-878. Amsterdam: North-Holland.

- 7- Bauwens, L., Laurent, S. and J. V. K. Rombouts. 2006. Multivariate GARCH models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21: 79-110.
- 8- Bera, A. K. and M. L. Higgins. 1993. ARCH models: Properties, estimation and testing. *Journal of Economic Surveys*, 7: 305-366.
- 9- Bollerslev, T., Chou, R. Y. and K. F. Kroner. 1992. ARCH modeling in finance: A selective review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52: 5-59.
- 10- Bollerslev, T., Engle, R. F. and D. B. Nelson. 1994. ARCH Models. in R.F. Engle and D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Volume IV, 2959-3038, Amsterdam: North-Holland.
- 11-
- 12- Box, G. E. and G. M. Jenkins. 1976. *Time series analysis. Forecasting and control*, San Francisco: Holden-Day.
- 13- Chen, C. and L. M. Liu. 1991. Forecasting time series with outliers, *Journal of Forecasting*, 12: 13-35.
- 14- Dai, Y. and L. Billard. 2003. Maximum likelihood estimation in space time bilinear models. *Journal of Time Series Analysis*, 24(1): 25-44.
- 15- Degiannakis, S. and K. F. Xekalaki. 2004. Autoregressive conditional heteroscedasticity (ARCH) models: A review. *Quality Technology and Quantitative Management*, 1: 271-324.
- 16- Engle, R. F. 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations. *Econometrica*, 50: 987-1007.
- 17- Engle, R. F. and A. J. Patton. 2001. What good is a volatility model?, *Quantitative Finance*, 1: 237-245.
- 18- Fan, J. and Q. Yao. 2003. *Nonlinear time series, nonparametric and parametric methods*. Springer-Verlag, New York, Inc.
- 19- Franses, P. H. and D. Van Dijk. 2002. *Non-linear time series models in empirical finance*, Cambridge University Press.
- 20- Granger, C. W. J. and A. P. Andersen. 1978. *An introduction to bilinear time series models*. Vandenhoeck and Ruprecht: Gottingen.
- 21- Khalili, K., Nazeri Tahrudi, M., Abbaszadeh Afshar, M. and Z. Nazeri Tahrudi. 2013. Modeling Monthly Mean Air Temperature Using SAMS2007 (Case Study: Urmia synoptic station). *Journal of Middle East Applied Science and Technology*, 15: 578-583.
- 22- Kim, W. K., Billard, L. and I. V. Basawa. 1990. Estimation of first order diagonal bilinear time series model. *Journal of Time Series Analysis*, 11:215-230.
- 23- Komornik, J., Komornikova, M., Mesiar, R., Szokeova D. and J. Szolgay. 2006. Comparison of forecasting performance of nonlinear models of hydrological time series. *Journal of Physics and Chemistry of the Earth*, 31:1127-1145.
- 24- Lifshits, M. A. 2006. Invariance principle in a bilinear model with weak nonlinearity. *Journal of Mathematical Sciences*, 137(1): 4541-4545.
- 25- Pagan, A. 1996. The econometrics of financial markets. *Journal of Empirical Finance*, 3: 15-102.
- 26- Palm, F. 1996. GARCH models of volatility. in C.R. Rao and G.S. Maddala (eds.) *Handbook of Statistics*, 14: 209-240. Amsterdam: North-Holland.

- 27- Pham, D. T. 1993. Bilinear time series models. In dimension estimation and models (H.Tong, ed.). World Scientific, Singapore.
- 28- Priestley, M. B. 1988. Non-linear and non-stationary time series analysis. Academic Press, London.
- 29- Sesay, S. A. O. and T. Subba Rao. 1992. Frequency domain estimation of a bilinear time series model. *Journal of Time Series Analysis*, 13: 521-545.
- 30- Shephard, N. 1996. Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility models,” in D.R. Cox, D.V. Hinkley and O.E. Barndorff-Nielsen (eds.) *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, 1-67. London: Chapman & Hall.
- 31- Subba Rao, T. 1981. On the theory of bilinear series models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 43: 224-255.
- 32- Subba Rao, T. and M. M. Gabr. 1984. An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models. *Lecture Notes in Statistics*, 24, Springer-Verlag: New York.
- 33- Taylor, J. W. and R. Buizza. 2004. A comparison of temperature density forecasts from GARCH and atmospheric models. *Journal of Forecasting*, 23(5): 337-355.
- 34- Thomas, H. A. and M. B. Fiering. 1962. Mathematical synthesis of stream flow sequences for the analysis of river basin by simulation. Harward University Press, Cambridge, 751p.
- 35- Tol, R. J. S. 1996. Autoregressive conditional heteroscedasticity in daily temperature measurements, *Environmetrics*, 7: 67-75.
- 36- Tong, H. 1990. Non-linear time series; A dynamic system approach, Oxford University Press. New York.
- 37- Tsay, R. S. 2002. Analysis of financial time series, University of Chicago, A Wiley – Interscience Publication, John Wiley Sons; Inc.
- 38- Tsonis, A. A. 2001. Probing the linearity and nonlinearity in the transitions of the atmospheric circulation. *Nonlinear Processes Geophysics*, 8: 341-345.
- 39- Wang, W., Van Gelder P. H. A. J. M. and J. K. Vrijling. 2005. Testing and modeling autoregressive conditional heteroskedasticity of stream flow processes. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 12: 55-66.
- 40- Yevjevich, V. M. 1963. Fluctuations of wet and dry years. Part 1. Research data assembly and mathematical models. Text it Hydrology Paper 1, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.