

بررسی تحلیلی اثر زهکش‌های قائم بر روند نشست تحکیمی در خاک‌های همسان‌گرد

جواد احدیان^{۱*}، رضا پورساکي^۲ و منصور سراج^۳

۱* - نویسنده مسئول، دانشیار گروه سازه‌های آبی، دانشکده مهندسی علوم آب، دانشگاه شهید چمران اهواز. ja_ahadiyan@yahoo.com

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، دانشکده مهندسی علوم آب، دانشگاه شهید چمران اهواز.

۳- دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، ایران.

تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۱/۲۱

تاریخ دریافت: ۹۳/۸/۲۴

چکیده

یکی از روش‌های سرعت بخشیدن به روند نشست تحکیمی، احداث زهکش‌های قائم می‌باشد. در این تحقیق معادله‌ی سه بعدی سرعت زمانی تحکیم در مختصات استوانه‌ای و شرایط مرزی مشخص استخراج شد، سپس اقدام به حل تحلیلی معادله یاد شده گردید. پس از حل معادله، تحلیل نتایج با استفاده از نرم افزار متلب انجام شد و تغییرات درصد نشست متوسط نسبت به زمان بررسی شد و با نتایج حاصل از آزمایش تحکیم و روش یک‌بعدی ترزاقی مقایسه شد. مقادیر استفاده شده برای شعاع زهکش قائم در این مدل، به ترتیب برابر با ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر در نظر گرفته شد. برای کنترل نتایج تحلیلی، با ناچیز در نظر گرفتن شعاع زهکش قائم در خاک همسان‌گرد، نتایج حاصل از تحلیل معادلات، منطبق بر حل معمول ترزاقی شد. نتایج نشان داد که، بیش‌ترین اختلاف زمانی در نشست تحکیمی ۱۰۰ درصد، بین روش ترزاقی و روش زهکشی شعاعی - عمودی، مربوط به بارگذاری ۴ کیلوگرم در شعاع زهکش ۲ سانتی‌متر می‌باشد و مقدار آن در حدود شش ساعت است؛ کم‌ترین اختلاف زمانی در نشست تحکیمی ۱۰۰ درصد، بین روش ترزاقی و روش زهکشی شعاعی - عمودی، مربوط به بارگذاری ۵ کیلوگرم در شعاع زهکش ۰/۵ سانتی‌متر می‌باشد و مقدار آن در حدود یک ساعت است. از طرفی در مقایسه با روش‌های عددی مشخص گردید که روش‌های تحلیلی با داشتن دقت بالاتر درجه‌ی مشخصی از تحکیم را زمان کمتری پیش‌بینی می‌نماید.

کلیدواژه‌ها: تحکیم، حل تحلیلی، زهکش قائم، شرایط مرزی، فشار آب منفذی.

Analytical Investigation of the Effect of Vertical Drains to Consolidation Settlement Process in Isotropic Soils

J. Ahadiyan^{1*}, R.Poursaki² and M. Seraj

1* - Corresponding Author, Associate Professor, Faculty of Water Science Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Iran.

2- M.Sc. student, Faculty of Water Science Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Iran.

3- Associate Professor, Faculty of Mathematics and Computer Science Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Iran

Received: 15 November 2014

Accepted: 10 February 2016

Abstract

Vertical drains installation can be used to accelerate the consolidation settlement. In this research, three dimension equation of consolidation in cylindrical coordinate with certain boundary condition was obtained and the analytical solution was performed. Then, the results at the MATLAB were written and the variation of degree of the settlement versus time was investigated. The results with experimental data of oedometer test were also compared. The account of radial drains in this model were considered 0.5, 1, 1.5 and 2 cm. To verify the analytical solution, in the isotropic soils and zero radius of the vertical drain, the results and the traditional Terzaghi's method were fully established with suitable satisfactory. The results showed. The most difference of 100% settlement velocity between of Terzaghi method and

radial-vertical method was related to 40kg loads at the drain's with 2 cm radius. This amount was 6 hr, however, the least of difference time of 100% settlement velocity was related to 5 kg loads at the drains with 0.5 cm radius and this time is 1 hr. However, results showed the analytical solution in comparison to numerical methods are predicted less time of average degree of consolidation as more accuracy.

Keywords: Consolidation, Analytical solution, Vertical drain, Boundary condition, Pore water pressure.

فشار آب منفذی اضافی و تغییر شکل جانبی خاک را نسبت به زمان و شعاع، به دست آورد و به این نتیجه رسید که فشار آب منفذی در مرکز استوانه‌ی خاک، نسبت به زمان ابتدا افزایش یافته و پس از رسیدن به یک مقدار بیشینه کاهش می‌یابد. عباسی و همکاران^۳ (۲۰۰۷)، با لحاظ فرضیه‌های جدیدی شامل امکان وجود جریان غیرداری بر حرکت آب منفذی در حین زهکشی نمونه و رفتار غیرخطی خاک، معادله‌های جدیدی برای تحکیم با کرنش ثابت ارائه داده است. معادله‌های ارائه شده به روش تفاضل محدود^۴ و تحلیلی حل گردیده‌اند و روابطی جهت برآورد و محاسبه پارامترهای تحکیم‌پذیری خاک با لحاظ شرایط داری و غیرداری به همراه رفتار خطی خاک ارائه داده است. هم‌چنین عباسی و همکاران (۲۰۰۷) مشاهده نمود که نتایج حاصل از معادله غیرخطی ارائه شده، تطابق بهتری با نتایج حاصل از آزمایش در مقایسه با تئوری ترزاقی دارند و یک رابطه ریاضی برای تعیین مستقیم رابطه بین درصد تحکیم و زمان ارائه داده است. دیرادو و همکاران^۵ (۲۰۰۹)، مطالعه‌ای با عنوان تاثیر رابطه اشباع - مکش در تدوین مدل‌های تحکیم خاک های غیر اشباع انجام دادند. آن‌ها در این مطالعه یک مدل عددی کامل همراه با تجزیه و تحلیل تحکیم خاک بر اساس ترکیبی از حالت‌های مختلف تنش ارائه دادند. مندز و همکاران^۱ (۲۰۱۰)، به آنالیز غیر خطی تحکیم در خاک اشباع الاستیک پرداخته‌اند. در این مطالعه، سیال، تراکم ناپذیر و نفوذپذیری، متغیر در نظر گرفته شده است. این محققان از روش المان محدود^۶ استفاده نموده‌اند. کین و همکاران^۷ (۲۰۱۰, a) ، راه حل تحلیلی برای تحکیم یک بعدی ارائه داده‌اند. در این مطالعه خاک غیر اشباع بوده و تحت بارگذاری‌های متفاوت قرار گرفته است. بارگذاری با گذشت زمان به صورت تصاعدی اضافه شده است. کین و همکاران (۲۰۱۰, b)، یک راه حل نیمه تحلیلی برای تحکیم خاک‌های غیر اشباع با زهکشی آزاد، بر اساس معادله تحکیم یک بعدی فردلاندر برای خاک اشباع نشده، قانون داری و قانون فیک، برای خاک دارای زهکشی ارائه دادند. این نمونه دارای ضخامت محدود و تحت بارگذاری عمودی یکنواخت بوده و در سطوح بالا و پایین نسبت به آب و هوا غیر قابل نفوذ می‌باشد.

مقدمه

نشست حاصل از تحکیم، در اثر تغییر حجم خاک‌های چسبنده‌ی اشباع به دلیل خروج آب از درون فضاها‌ی خالی آن‌ها ایجاد می‌شود و نشست آبی در اثر تغییر شکل الاستیک خاک خشک و خاک‌های مرطوب و اشباع بدون تغییر میزان رطوبت ایجاد می‌گردد. ترزاقی^۱ (۱۹۴۳) اولین نظریه را که در آن سرعت تحکیم یک بعدی خاک‌های رس اشباع در نظر گرفته شده بود، ارائه نمود. تحلیل معادله‌ی یک بعدی ترزاقی (۱۹۴۳) بر اساس فرضیه‌های زیادی صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به همگن بودن سیستم رس-آب، اشباع کامل بودن خاک، عدم تراکم‌پذیری آب، حرکت آب در راستای فشردگی آن، معتبر بودن قانون داری و عدم تراکم‌پذیری ذرات خاک، اشاره نمود. اهمیت تثبیت خاک از نظر نشست‌پذیری باعث شده که مهندسان خاک روش‌های جدیدتری نسبت به روش معمول ترزاقی (۱۹۴۳) برای نشست خاک در نظر بگیرند؛ چرا که، این روش چندان مناسب برای پاسخ به نیازهای طرح نمی‌باشد. در این تحقیق سعی شده است روشی برای تسریع در نشست تحکیمی ارائه شود، چرا که یکی از مسائل در اجرای پروژه‌های عمرانی و احداث سازه‌های آبی، مسأله نشست‌پذیری خاک است و برای تثبیت خاک از نظر نشست‌پذیری و صرف زمان کمتر برای نشست تحکیمی، می‌توان این موضوع را مد نظر قرار داد. یکی از راهکارها برای سرعت بخشیدن به نشست تحکیمی، احداث زهکش‌های قائم می‌باشد. حل معادله تحکیم در این شرایط حداقل به صورت دو بعدی صورت می‌پذیرد و معادله‌ی معمول ترزاقی (۱۹۴۳) چندان مناسب برای پاسخ به نیازهای طرح نخواهد بود؛ لذا در این تحقیق هدف تحلیل معادله‌ی تحکیم در شرایطی است که جریان به صورت شعاعی و قائم زهکشی می‌شود. در واقع هدف این تحقیق بررسی روند نشست زمانی تحکیم با استفاده از زهکش‌های قائم، و مقایسه آن با روش معمول ترزاقی (۱۹۴۳) می‌باشد. نتایج ریاضی حاصل از تحلیل معادله تحکیم، با نتایج به دست آمده از روش آزمایشگاهی مقایسه خواهد شد. محققین زیادی پیرامون مسأله تحکیم، روش‌های تحلیلی و عددی متفاوتی، ارائه داده‌اند. در این راستا می‌توان به تحقیق مک کینلی^۲ (۱۹۹۸)، اشاره نمود که با استفاده از روش تفاضل محدود و در نظر گرفتن تنش شعاعی، معادله‌ی ترزاقی (۱۹۴۳) را در مختصات قطبی حل نمود و تغییرات

3 - Abbasi *et al.*

4-Finite Difference

5-Di Rado *et al.*

6 -Menendez *et al.*

7- Finite Element Method (FEM)

8-Qin *et al.*

1-Terzaghi

2-McKinley

روش‌های اجزای محدود و حل‌های تحلیلی موجود، معتبرسازی نمودند. بر اساس آن چه که در مروری بر منابع ذکر گردید، مشخص می‌شود که روش‌های تسریع در نشست تحکیمی به صورت تحلیلی کم‌تر مورد توجه واقع شده است، لذا در تحقیق حاضر، اثر زهکش‌های قائم در تسریع نشست تحکیمی برای خاک‌های همسان‌گرد مورد مطالعه قرار گرفته است.

مواد و روش‌ها

معادله‌ها و شرایط مرزی حاکم بر مسأله

معادله سه‌بعدی تحکیم ترزاقی (۱۹۴۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

در معادله فوق، C : ضریب تحکیم می‌باشد و از

رابطه $\frac{k}{\gamma_w m_v}$ به دست می‌آید که k هدایت هیدرولیکی، m_v

ضریب تراکم‌پذیری حجمی خاک، و γ_w : وزن مخصوص خاک است. این در حالی است که در معادله‌ی یک بعدی تحکیم که به معادله‌ی ترزاقی (۱۹۴۳) معروف می‌باشد معادله‌ی (۱) به صورت $u(z, t)$ نوشته شده و تغییرات فشار آب منفذی در راستاهای x و y در نظر گرفته نمی‌شود. معادله دیفرانسیل فوق در حالتی استخراج شد که در آن خاک همسان‌گرد فرض شده است، به این مفهوم که هدایت هیدرولیکی خاک در تمام جهات یکسان می‌باشد. با توجه به این که زهکش‌های قائم، خاک را به صورت شعاعی زهکشی می‌کنند، معادله دیفرانسیل ترزاقی تحت تأثیر زهکش‌های قائم و عملگر مختصات استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

در رابطه فوق، به دلیل تقارن، از جریان محیطی صرف نظر شده است، که برحسب مکانیزم حرکت جریان آب در خاک، فرض صحیحی است. در واقع جریان محیطی تغییرپذیری فشار آب منفذی با تغییر در زاویه از صفر تا 2π رادیان بوده که در یک ارتفاع ثابت به دلیل تقارن دایره‌ای تغییر فشار آب منفذی نسبت به شعاع صورت گرفته و نسبت به زاویه این تغییرات برابر با صفر می‌باشد. شرایط مرزی قابل تعمیم در معادله، بر اساس شرایط فیزیکی مسأله خواهد بود که به صورت زیر نوشته می‌شود:

سای و همکاران^۱ (۲۰۱۰)، راه حل تحلیلی برای تحکیم یک بعدی خاک‌های رسی ارائه دادند. راه حلی تحلیلی برای تحکیم یک بعدی با در نظر گرفتن شیب آستانه تحت بارگذاری وابسته به زمان ارائه گردید. بین راه حل ارائه شده با برخی از راه حل‌های عددی در دسترس برای یک مورد خاص مقایسه انجام شد. زو و بین^۲ (۲۰۱۱)، در تحقیقی، راه حلی را برای اندازه‌گیری مقدار تحکیم متوسط در خاک‌های غیر همگن در دو حالت زهکشی را ارائه دادند. آنها سه حالت مختلف در نظر گرفتند که شامل، ضریب نفوذپذیری نسبت به عمق متغیر و تراکم‌پذیری ثابت، تراکم‌پذیری نسبت به عمق متغیر و ضریب نفوذپذیری ثابت، ضریب تحکیم نسبت به عمق متغیر و تراکم‌پذیری و ضریب نفوذپذیری ثابت. این محققان زمان را نرمال‌سازی نموده و به عنوان مقدار ویژه در مسئله تحکیم مورد استفاده قرار دادند. ژنگ و همکاران^۳ (۲۰۱۰)، با متغیر در نظر گرفتن ضریب تحکیم، ضریب نفوذپذیری و ضریب تراکم‌پذیری نسبت به زمان، معادله‌ی تحکیم را به صورت نیمه تحلیلی در حالت جریان شعاعی حل نمودند. لو و همکاران^۴ (۲۰۱۱)، به بررسی تحکیم با زهکشی عمودی پرداختند. در این مطالعه تنش نسبت به عمق متغیر در نظر گرفته شده است که ناشی از بارگذاری چند مرحله‌ای است. رانی و همکاران^۵ (۲۰۱۱)، با استفاده از تبدیلات انتگرالی لاپلاس-هانکل معادله‌ی تحکیم را در شرایط بارگذاری دایره‌ای برای لایه‌ی رس، به صورت تحلیلی حل نمودند. وان‌هوان و شوای^۶ (۲۰۱۲)، با به کارگیری روش عددی مربع‌سازی دیفرانسیل، معادله‌ی تحکیم را در خاک غیراشباع حل نموده و به این نتیجه رسیدند که این روش برای حل معادله‌ی تحکیم در خاک‌های غیراشباع از دقت کافی برخوردار می‌باشد. انگ و همکاران^۷ (۲۰۱۲)، موفق به طراحی یک روش تقریبی ساده برای محاسبه درجه تحکیم لایه‌های زیرین خاک شده‌اند. آنان از شیوه نفوذ جزئی زهکش‌های قائم پیش‌سازی شده استفاده نموده‌اند. تانگ و همکاران^۸ (۲۰۱۳)، راه حلی برای تحکیم خاک سه لایه در شرایط زهکشی ارائه دادند. فشار آب حفره‌ای در امتداد عمق خاکریزی بصورت قابل قبولی و نزدیک به فشار آب حفره‌ای اندازه‌گیری شده محاسبه شد. آن‌ها با استفاده از نرم‌افزار متلب دقت محاسبات را افزایش داده‌اند و این مطالعه در یوکینگ بای کشور چین انجام گرفت. لی‌یو و همکاران^۹ (۲۰۱۴)، معادله تحکیم را با استفاده از تبدیل لاپلاس برای یک خاک چند لایه‌ای با زهکش قائم، به صورت نیمه تحلیلی حل نمودند. آن‌ها دقت نتایج حاصل را با مقایسه با

- 1-Xie et al.
- 2-Zhu and Yin
- 3-Zheng et al.
- 4-Lu et al.
- 5-Rani et al.
- 6-Laplace-Hankel Transform
- 7-Wan-Huan and Shuai
- 8-Ong et al.
- 9-Tang et al.
- 10-Liu et al.

احدیان و همکاران: بررسی تحلیلی اثر زهکش‌های قائم بر روند...

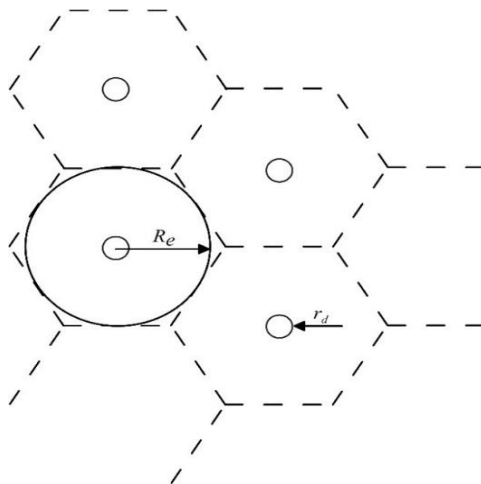
همچنین شرط مرزی سوم به دلیل ایجاد زهکش‌های عمودی و صفر شدن فشار آب در ناحیه‌ی زهکش نوشته می‌شود. از طرفی در خارج از ناحیه‌ی تأثیر زهکش فشار آب منفذی تغییر نخواهد نمود که این موضوع در شرط مرزی چهارم در رابطه‌ی (۳) نمایش داده شده است. در روابط (۳) و (۴)، پارامتر u فشار آب منفذی در هر نقطه می‌باشد. q سرشار اعمال شده بر روی نمونه خاک است که برابر با فشار آب منفذی در لحظه $t = 0$ می‌باشد. پارامتر H : ارتفاع نمونه خاک می‌باشد پارامتر r_d : شعاع زهکش قائم، و R_e : شعاع تأثیر زهکش قائم است که برابر با شعاع نمونه خاک تحت آزمایش در نظر گرفته می‌شود. فشار آب منفذی روی شعاع زهکش قائم برابر با صفر می‌باشد و تغییرات فشار آب منفذی نسبت به r : روی شعاع تأثیر زهکش قائم، برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۱)، پلان و پروفیل زهکش‌های قائم نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} u(r, 0, t) &= 0 \quad \forall 0 \leq z \leq H \\ u(r, H, t) &= 0 \quad \forall 0 \leq z \leq H \\ u(r_d, z, t) &= 0 \quad \forall r_d \leq r \leq R_e \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_e} &= 0 \quad \forall r_d \leq r \leq R_e \end{aligned} \quad (3)$$

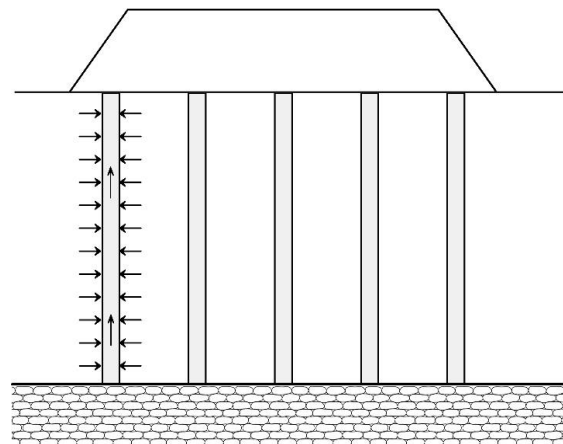
و همچنین شرط اولیه حاکم بر معادله، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u(r, z, 0) = q \quad (4)$$

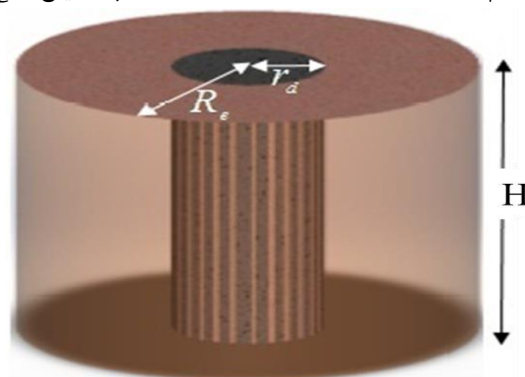
با توجه به این که نشست تحکیمی در اثر خروج آب از منافذ با وجود زهکش لایه‌ای صورت می‌پذیرد، در رابطه‌ی (۳) شرط مرزی اول وجود زهکش در عمق صفر و H را نشان می‌دهد.



(ب) نمایش شعاع تأثیر زهکش‌ها



(الف) موقعیت زهکش‌های قائم



(ج) نمایش سه بعدی نمونه‌ی خاک تحت زهکشی شعاعی و قائم

شکل ۱- زهکش‌های ماسه‌ای جهت تسریع در نشست تحکیم خاک‌های رسی

حل معادله

$$\mu_1(\lambda_n r) = J_1(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_1(\lambda_n r) \quad (۹)$$

λ_n ها مقادیر ویژه‌ای هستند که وابسته به صفرهای تابع μ_0 می‌باشند و با توجه به شرایط مرزی موجود در مسأله، با استفاده از نرم‌افزار متلب، از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mu_0(\lambda_n r_d) = J_1(\lambda_n r_d) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r_d) \quad (۱۰)$$

درجه تحکیم در هر شعاع، عمق و در هر زمان با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$u_{r,z} = 1 - \frac{u}{q} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{M \lambda_n} \frac{r_d \mu_1(\lambda_n r_d)}{r_d^2 \mu_1^2(\lambda_n r_d) - R_e^2 \mu_0^2(\lambda_n R_e)} \times \left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r) \right) \sin\left(\frac{2Mz}{H}\right) e^{-c\left(\frac{4M^2}{H^2} + \lambda_n^2\right)t} \quad (۱۱)$$

و درجه متوسط تحکیم برای کل لایه خاک، که هم به صورت قائم و هم به صورت شعاعی زهکشی می‌شود، با انتگرال گیری از رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{V} \iint u_{r,z} dV = \frac{\int_{r_d}^{R_e} \int_0^H u_{r,z} 2\pi r dr dz}{\int_{r_d}^{R_e} \int_0^H 2\pi r dr dz} \quad (۱۲)$$

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8r_d^2}{M^2 \lambda_n^2 (R_e^2 - r_d^2)} \frac{\mu_1^2(\lambda_n r_d)}{R_e^2 \mu_0^2(\lambda_n R_e) - r_d^2 \mu_1^2(\lambda_n r_d)} e^{-c\left(\frac{4M^2}{H^2} + \lambda_n^2\right)t} \quad (۱۳)$$

معادله اخیر، نتیجه تحلیل ریاضی معادله (۲) است که بیان گر درصد متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان می‌باشد و با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌نویسی متلب قابل محاسبه است. با استفاده از نتایج حاصل از آزمایش تحکیم یک‌بعدی که مقدار ضریب تحکیم را اندازه‌گیری می‌کند و ابعاد نمونه به عنوان داده‌های ورودی به رابطه (۱۳)، میزان درجه تحکیم نمونه خاک نسبت به زمان در مقادیر مختلف بارگذاری قابل اندازه‌گیری می‌باشد. لازم به توضیح است که پارامتر ضریب تحکیم تابعی از مشخصات فیزیکی خاک و شرایط بارگذاری بوده که برای هر نمونه‌ی خاک باید در آزمایشگاه اندازه‌گیری شود.

معادله (۲) را با روش تفکیک پذیری می‌توان به صورت تحلیلی حل نمود. این روش در دو مرحله صورت می‌پذیرد. در مرحله اول، بخش مکانی معادله که شامل r و z می‌باشد، از بخش زمانی تفکیک می‌شود؛ در مرحله دوم، بخش قائم معادله از بخش شعاعی تفکیک خواهد شد. با به‌دست آوردن جواب‌های زمانی، شعاعی و قائم، و ترکیب خطی بین‌هایت جواب مستقل خطی، تابع $u(r, z, t)$ که بیان گر میزان فشار آب منفذی در هر نقطه از خاک و در هر زمان می‌باشد، به صورت رابطه (۵) به‌دست خواهد آمد:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r) \right) \sin\left(\frac{M\pi z}{H}\right) e^{-c\left(\frac{M^2 \pi^2}{H^2} + \lambda_n^2\right)t} \quad (۵)$$

در رابطه فوق، J_0 و Y_0 : به ترتیب توابع بسل نوع اول و نوع دوم از مرتبه صفر، و J_1 و Y_1 : هم به ترتیب توابع بسل نوع اول و نوع دوم از مرتبه‌ی یک می‌باشند. مقدار a_{mn} با استفاده از شرایط اولیه موجود در مسأله، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$a_{mn} = \frac{\int_0^{R_e} \int_{r_d}^{R_e} q r \left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r) \right) \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) dr dz}{\int_0^{R_e} \int_{r_d}^{R_e} r \left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r) \right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi z}{H}\right) dr dz} \quad (۶)$$

که پس از ساده‌سازی می‌توان نوشت:

$$a_{mn} = \frac{4q}{M \lambda_n} \cdot \frac{r_d \mu_1(\lambda_n r_d)}{r_d^2 \mu_1^2(\lambda_n r_d) - R_e^2 \mu_0^2(\lambda_n R_e)} \quad (۷)$$

از حل انتگرال در رابطه (۶)، نتیجه شد که مقدار m باید یک عدد فرد باشد، و برابر با $2m' - 1$ در نظر گرفته شد. مقدار عددی M در رابطه فوق، برابر با $\frac{\pi}{2}(2m' - 1)$ می‌باشد. μ_0 و μ_1 خلاصه شده‌ی توابع بسل می‌باشند و از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mu_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r) \quad (۸)$$

نتایج و بحث

۱- بررسی نتایج آزمایشگاهی

برای بررسی بهتر نتایج، اقدام به انجام آزمون تحکیم یک بعدی گردید که در این راستا یک نمونه خاک از منطقه رامهرمز استان خوزستان به دلیل نشست پذیری قابل توجه در این خاک تهیه شد. روی این نمونه خصوصیات فیزیکی از قبیل رطوبت، حدود آتبرگ و چگالی نسبی در آزمایشگاه مکاتیک خاک دانشکده مهندسی علوم آب دانشگاه شهید چمران اهواز اندازه‌گیری شد. بر اساس نتایج مقدماتی به دست آمده از آزمون‌ها مشخص گردید که رده‌ی خاک CL می‌باشد. علاوه بر آزمون‌های یاد شده آزمایش یک بعدی ادنومتري در دستگاه دیجیتالی تحکیم نیز بر روی نمونه انجام گردید. نتایج حاصل از آزمایش تحکیم بر روی نمونه خاکی با تراکم ۹۵ درصد، به‌دست آمده است. خاک تحت آزمایش در دستگاه تحکیم‌سنج، دارای ارتفاع ۲۰ میلی‌متر می‌باشد و قطر آن در حدود ۷۵ میلی‌متر است. در جدول (۱)، مقادیر ضریب تحکیم حاصل از آزمایش تحکیم یک بعدی ترزاقی (۱۹۴۳)، برای هر بارگذاری به‌دست آمده است.

در جدول فوق، e : نسبت پوکی، k : ضریب هدایت هیدرولیکی، C_v : ضریب تحکیم و m_v : ضریب قابلیت تراکم‌پذیری حجمی که تقریباً عکس مدول الاستیسیته است، می‌باشد. از آنجا که در آزمون تحکیم یک نمونه خاک تحت

بارگذاری‌های متفاوت در یک دوره‌ی زمانی قرار می‌گیرد، سربارهای مختلفی بر روی نمونه قرار داده شد. در آزمون انجام شده هر بارگذاری به مدت ۲۴ ساعت بر روی نمونه قرار داده شد و در طی این مدت تغییر ارتفاع نمونه نسبت به زمان توسط ترانسدیوسر دیجیتالی برداشت و سپس از طریق مبدل به کامپیوتر منتقل گردید. پس از اتمام آزمایش‌ها از طریق روابط وزنی حجمی نسبت پوکی در پایان هر مرحله از بارگذاری محاسبه شد و در نهایت ضریب ادنومتري استخراج گردید. در آزمایش‌های صورت گرفته از روش لگاریتم زمان استفاده شد و مقدار C_v برای هر بارگذاری از روش ترزاقی (۱۹۴۳) محاسبه گردید. در روش لگاریتم زمان، زمان ۵۰ درصد تحکیم محاسبه می‌گردد.

بررسی نتایج حاصل از تحلیل ریاضی

برای مقایسه روش یک بعدی آزمایشگاهی ترزاقی (۱۹۴۳) با روش زهکشی شعاعی - عمودی، ابتدا زمان دقیق رسیدن به ۵۰ درصد تحکیم با استفاده از رابطه (۱۳) محاسبه شده است. برای این منظور چهار مقدار 0.5 ، 1 ، 1.5 و 2 سانتی‌متر برای r_d که شعاع زهکش قائم می‌باشد، در نظر گرفته شده است تا تأثیر زهکش‌های قائم بر روند تحکیم بررسی شود.

جدول ۱- پارامترهای مهندسی حاصل از آزمایش تحکیم

$m_v \times 10^3$ (سانتیمتر مربع بر کیلوگرم)	$k \times 10^6$ (سانتیمتر بر ثانیه)	$C_v \times 10^5$ (سانتیمتر مربع بر ثانیه)	زمان ۵۰ درصد تحکیم (ثانیه)	e (نسبت پوکی)	بارگذاری (کیلوگرم)
۴۵/۹۹۹	۵/۱۰۱	۱۱/۱	۱۶۸۰	۰/۷۸۶	۵
۳۳/۹۹۹	۱/۶۹	۴/۹۸	۳۶۰۰	۰/۷۵۴	۱۰
۱۸	۰/۵۷۶	۳/۲	۵۴۰۰	۰/۷۲	۲۰
۸/۹۹	۰/۲۰۷	۲/۳۱	۷۲۰۰	۰/۶۸۷	۴۰

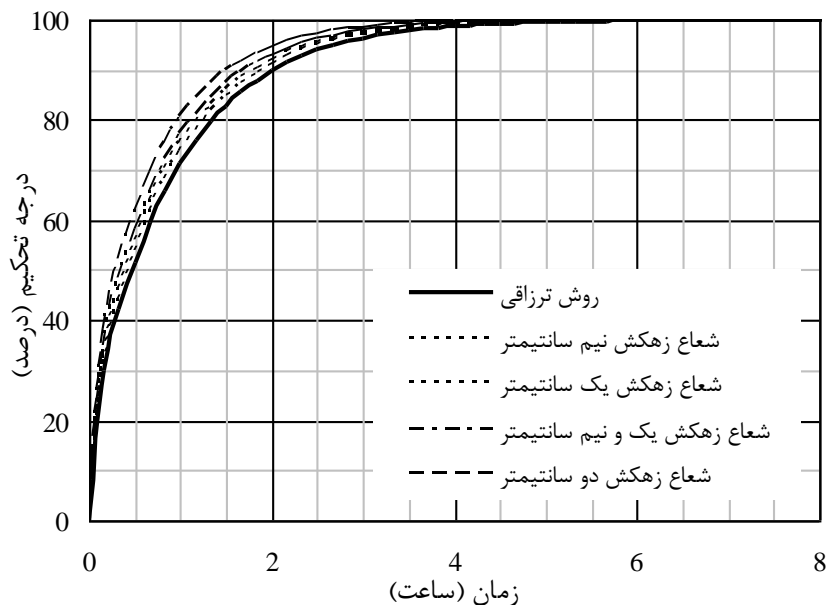
جدول ۲- مقایسه زمان t_{50} در مقادیر مختلف شعاع زهکش قائم

زمان لازم برای ۵۰ درصد تحکیم (ثانیه)				r_d سانتیمتر
بارگذاری ۴۰ کیلوگرم	بارگذاری ۲۰ کیلوگرم	بارگذاری ۱۰ کیلوگرم	بارگذاری ۵ کیلوگرم	
۶۶۲۰	۴۹۵۰	۳۲۸۰	۱۵۲۰	۰/۵
۶۰۸۰	۴۵۴۰	۳۰۰۰	۱۴۰۰	۱
۵۶۰۰	۴۱۸۰	۲۷۵۰	۱۲۸۰	۱/۵
۴۸۰۰	۳۵۶۰	۲۳۵۰	۱۰۸۰	۲
۷۲۰۰	۵۴۰۰	۳۶۰۰	۱۶۸۰	ترزاقی (۱۹۴۳)

نمودارها با استفاده از رابطه (۱۳) رسم شده‌اند. در شکل (۲)، نمودار درصد متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۵ کیلوگرم در شعاع‌های زهکش ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، رسم شده است. نمودار درصد متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان، با استفاده از روش یک‌بعدی ترزاقی نیز رسم شده است تا تأثیر استفاده از زهکش قائم بر روند نشست زمانی، به طور دقیق بررسی گردد.

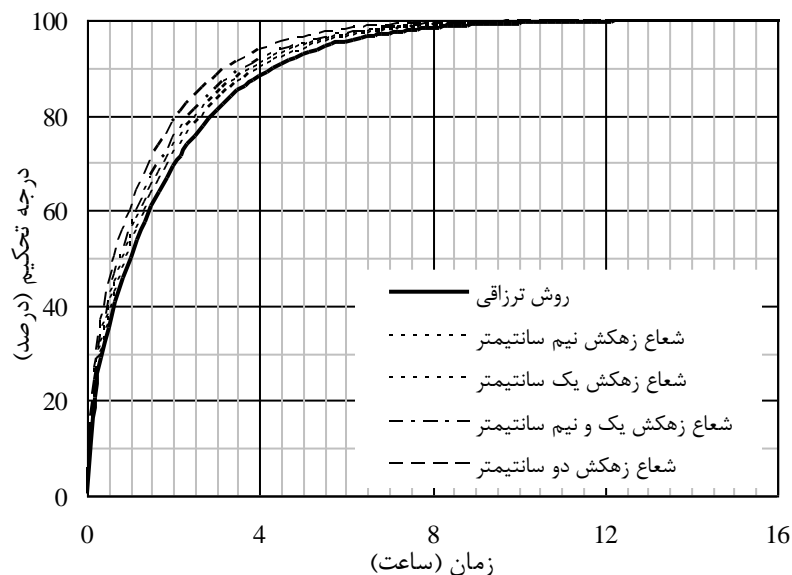
مطابق با شکل (۲)، زمان استهلاک کامل فشار آب منفذی و تحکیم ۱۰۰ درصد با استفاده از روش یک‌بعدی ترزاقی تقریباً برابر با ۱۰ ساعت می‌باشد. اگر از زهکش قائم با شعاع ۰/۵ سانتی‌متر استفاده شود، زمان تحکیم ۱۰۰ درصد برابر با ۹ ساعت می‌باشد. در صورتی که از زهکش قائم به شعاع ۱ سانتی‌متر استفاده شود، زمان تحکیم کامل خاک برابر با ۸ ساعت خواهد بود. در شعاع‌های زهکش ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، نمونه خاک به ترتیب پس از گذشت زمان ۷/۵ و ۶/۵ ساعت به نشست تحکیمی ۱۰۰ درصد خواهد رسید. در شکل (۳)، نمودار درصد متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۱۰ کیلوگرم در شعاع‌های زهکش ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، رسم شده است.

با توجه به جدول (۲)، در بارگذاری ۵ کیلوگرم، بیش‌ترین اختلاف در ۵۰٪ بین روش ترزاقی (۱۹۴۳) و روش زهکشی شعاعی - عمودی، برابر با ۱۰ دقیقه، و کم‌ترین اختلاف، برابر با ۲/۵ دقیقه می‌باشد. در این حالت به دلیل این که ضریب ادئومتری خاک نسبتاً زیاد می‌باشد، تأثیر زهکش قائم بر روند تحکیم آن چنان محسوس نمی‌باشد. در بارگذاری ۱۰ کیلوگرم، بیش‌ترین اختلاف در زمان رسیدن به ۵۰ درصد تحکیم تقریباً برابر با ۲۰ دقیقه، و کم‌ترین اختلاف تقریباً برابر با ۵ دقیقه می‌باشد. در بارگذاری ۲۰ کیلوگرم، بیش‌ترین اختلاف در زمان رسیدن به ۵۰٪ تحکیم برابر با ۳۰ دقیقه، و کم‌ترین اختلاف تقریباً برابر با ۱۰ دقیقه می‌باشد. در بارگذاری ۴۰ کیلوگرم، زمان رسیدن به ۵۰ درصد تحکیم برابر با ۲ ساعت می‌باشد؛ در حالی که با استفاده از زهکش‌های قائم به شعاع‌های ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، این زمان به ترتیب برابر با ۱/۸، ۱/۷، ۱/۵ و ۱/۳ ساعت می‌باشد. داده‌های موجود در جدول (۲)، صرفاً برای مقایسه نتایج حاصل از تحلیل‌های ریاضی با نتایج حاصل از روش آزمایشگاهی می‌باشد. برای بررسی دقیق‌تر، شکل‌های (۲) الی (۵) آورده شده است. در این شکل‌ها، نمودار درصد متوسط تحکیم نسبت به زمان برای چهار مقدار r_d در مقادیر بارگذاری مختلف رسم شده است. این

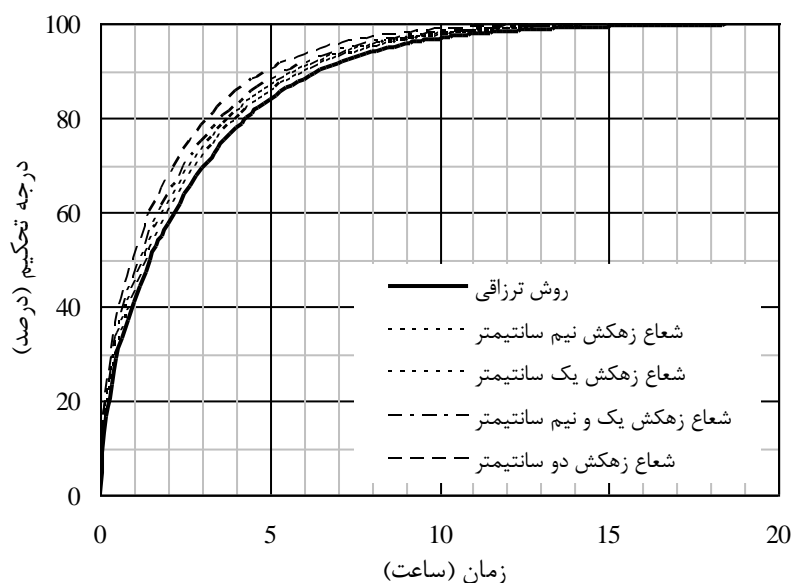


شکل ۲- تغییرات درصد نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۵ کیلوگرم

احدیان و همکاران: بررسی تحلیلی اثر زهکش‌های قائم بر روند...



شکل ۳- تغییرات درصد نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۱۰ کیلوگرم

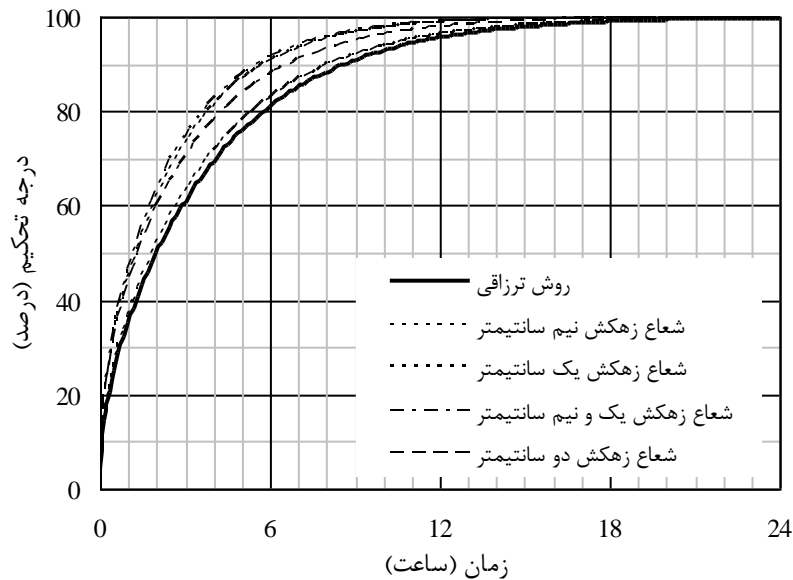


شکل ۴- تغییرات درصد نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۲۰ کیلوگرم

است، می‌توان گفت که زمان نشست تحکیمی کامل خاک از روش ترزاقی در حدود ۲۰ ساعت می‌باشد. با استفاده از زهکش قائم به شعاع‌های ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، این زمان به ترتیب برابر با ۱۸، ۱۷، ۱۶ و ۱۴ ساعت خواهد بود.

شکل (۵)، نمودار درصد متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۴۰ کیلوگرم را در شعاع‌های زهکش ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، نشان می‌دهد.

با توجه به آن‌چه که در شکل (۳) مشهود است، زمان تحکیم کامل نمونه خاک با استفاده از روش ترزاقی (۱۹۴۳) در حدود ۱۶ ساعت می‌باشد؛ در حالی که اگر از زهکش قائم به شعاع‌های ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر استفاده شود، زمان تحکیم ۱۰۰ درصد نمونه خاک به ترتیب برابر با ۱۴، ۱۳، ۱۲ و ۱۰/۵ ساعت خواهد بود. شکل (۴)، نمودار درصد متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۲۰ کیلوگرم را در شعاع‌های زهکش ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل (۴) مشهود



شکل ۵- تغییرات درصد نشست تحکیمی نسبت به زمان در بارگذاری ۴۰ کیلوگرم

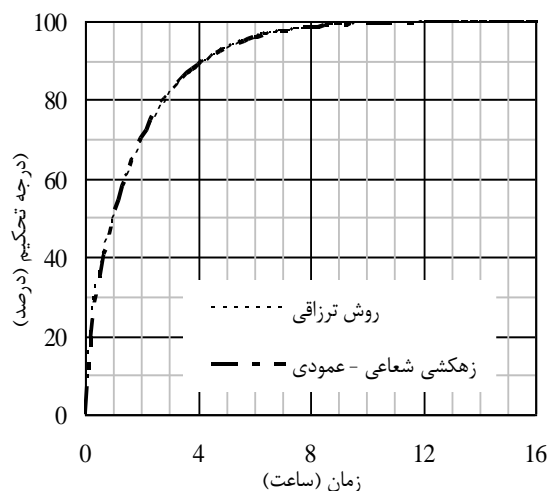
صحت‌سنجی رابطه نشست زمانی در جریان شعاعی -

عمودی با حل معمول ترازقی

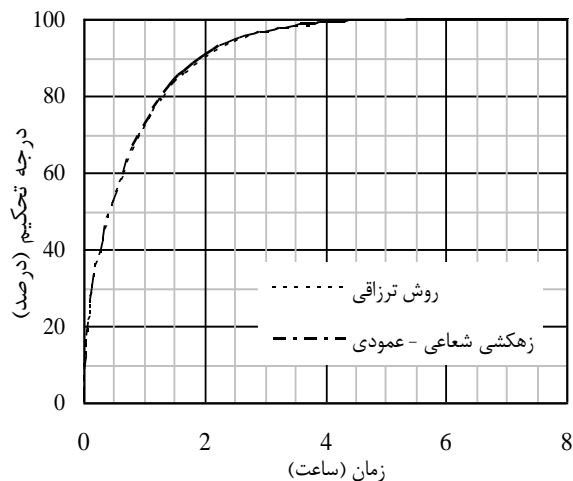
از آنجایی که در عمل نشست تحکیمی به روش معادله‌ی ترازقی (۱۹۴۳) صورت می‌پذیرد و در واقع این معادله حالت ساده شده‌ی نشست سه بعدی است می‌توان برای صحت‌سنجی و بررسی درست بودن معادله‌ی تحلیلی سه بعدی استخراج شده، نتایج را در حالت یک بعدی با روش تحلیلی ترازقی (۱۹۴۳) مقایسه نمود. در این حالت جواب‌های معادله باید دقیقاً مطابق با جواب‌های معادله‌ی ترازقی به دست آید. برای صحت‌سنجی رابطه نشست زمانی در شرایط زهکشی شعاعی - عمودی با روش ترازقی، شعاع زهکش قائم بسیار ناچیز در نظر گرفته شده است، به طوری که مقدار نسبت $\frac{r_d}{R_e}$ کم‌تر از ۰/۰۳ باشد. پس از آن، نتایج حاصل از معادله (۱۳) و حل معمول ترازقی به دست آمد. این نتایج در شکل (۶) نشان داده شده است:

با توجه به شکل (۵)، می‌توان بیان نمود که نمونه خاک با استفاده از روش ترازقی (۱۹۴۳) پس از گذشت زمان ۲۴ ساعت به ۱۰۰ درصد نشست تحکیمی می‌رسد. اگر از زهکش قائم به شعاع ۰/۵ سانتی‌متر استفاده شود، نمونه خاک پس از گذشت زمان ۲۲ ساعت به نشست تحکیمی کامل می‌رسد. اگر شعاع زهکش قائم ۱ سانتی‌متر باشد، زمان تحکیم ۱۰۰ درصد در حدود ۲۱ ساعت می‌باشد. در شعاع‌های زهکش ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر زمان رسیدن به نشست تحکیمی ۱۰۰ درصد به ترتیب برابر با ۲۰ و ۱۸/۵ ساعت خواهد بود. اختلاف زمانی که برای روند نشست تحکیمی در حالت‌های مختلف بیان شد، اگرچه ناچیز به نظر می‌رسد، اما باید توجه داشت که این مقادیر در مقیاس آزمایشگاهی محاسبه شده است. چنان‌چه محاسبات ریاضی در ابعاد واقعی صحرائی انجام گیرد، اختلاف زمانی ایجاد شده بر اثر احداث زهکش‌های قائم، کاملاً محسوس خواهد بود.

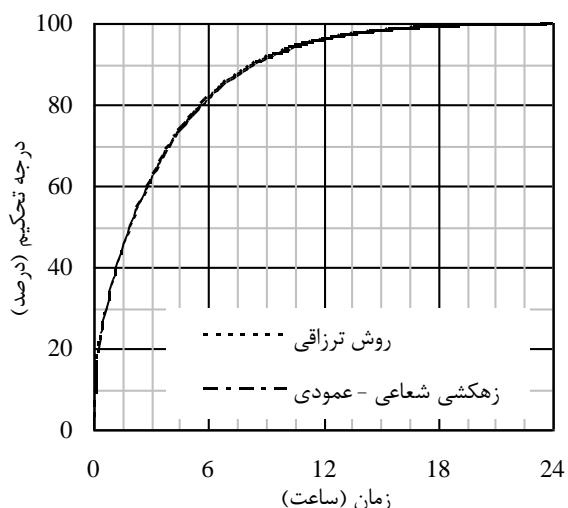
احدیان و همکاران: بررسی تحلیلی اثر زهکش‌های قائم بر روند...



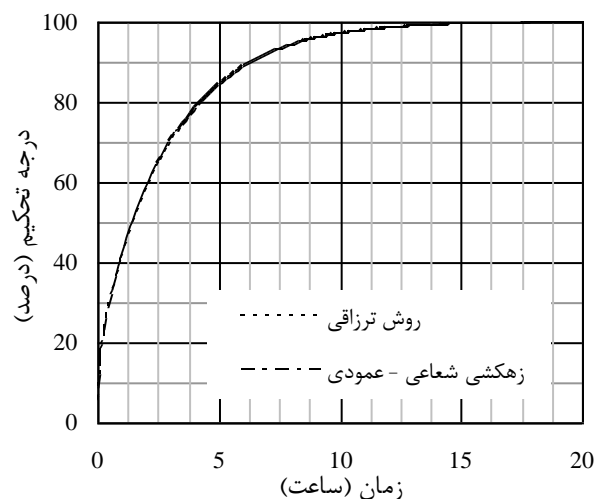
ب) بارگذاری ۱۰ کیلوگرم



الف) بارگذاری ۵ کیلوگرم



د) بارگذاری ۴۰ کیلوگرم



ج) بارگذاری ۲۰ کیلوگرم

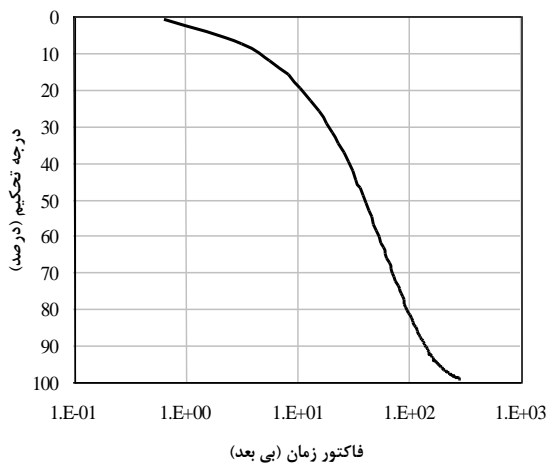
شکل ۶- صحت‌سنجی روش زهکشی شعاعی - عمودی با روش ترزاقی

مسأله در این تحقیق می‌باشد. در تحقیق وان‌هوان و شوای (۲۰۱۲)، پارامتر r_{10} به عنوان شعاع زهکش ماسه‌ای قائم معرفی شده و مقدار آن برابر با $0/5$ متر، و r_e نیز به عنوان شعاع تأثیر زهکشی معرفی شده و مقدار آن برابر با $4/5$ متر در نظر گرفته شده است؛ ارتفاع لایه خاک رس مورد مطالعه، h برابر با 4 متر، مقدار هدایت هیدرولیکی خاک، k ، و ضریب تراکم‌پذیری حجمی، am_v به ترتیب برابر 10^{-10} متر بر ثانیه و $2.5 \times 10^{-4} KPa^{-1}$ منظور شده است. به منظور مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج به دست آمده از تحقیق وان‌هوان و شوای (۲۰۱۲)، داده‌های مزبور به عنوان داده‌های ورودی، در رابطه‌ی (۱۳) قرار داده شده است. برای بررسی دقیق‌تر، در شکل (۷)، نمودارهای درجه متوسط نشست تحکیمی نسبت به زمان، با استفاده از روش وان‌هوان و شوای (۲۰۱۲) و همچنین روش تحلیلی استفاده شده در این تحقیق، نشان داده شده است.

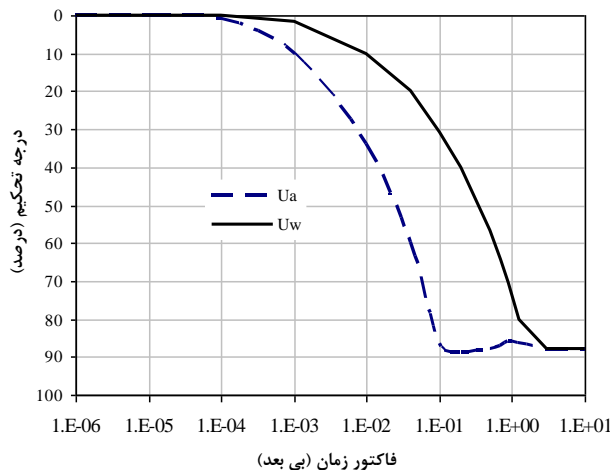
با توجه به آنچه که در شکل (۶) نشان داده شده است، ملاحظه می‌شود که در شرایطی که شعاع زهکش قائم ناچیز فرض شود، حل معادله تحکیم تحت جریان هیدرولیکی شعاعی - عمودی با استفاده از رابطه (۱۳)، منطبق بر حل معمول ترزاقی خواهد بود. این نتیجه، فقط برای خاک همسان‌گرد صادق می‌باشد.

مقایسه نتایج حاصله با نتایج تحقیقات گذشته

از جمله تحقیقات مشابهی که در گذشته روی موضوع تحکیم صورت گرفته شده، می‌توان به تحقیق وان‌هوان و شوای (۲۰۱۲) اشاره نمود که در دانشگاه ماکائو چین انجام شده است. در تحقیق یاد شده معادله دیفرانسیل نشست زمانی تحکیمی در سیستم مختصات قطبی استخراج شده و با استفاده از روش عددی مربع‌سازی دیفرانسیل منقطع‌سازی و حل شده است. شرایط اولیه و مرزی حاکم بر مسأله همانند شرایط اولیه و مرزی حاکم بر



فاکتور زمان (بی بعد)



فاکتور زمان (بی بعد)

الف) درجه تحکیم نسبت به زمان در روش وان هوان و شوای (۲۰۱۲) ب) درجه تحکیم نسبت به زمان با استفاده از معادله (۱۳) در تحقیق حاضر

شکل ۷- مقایسه درجه تحکیمی روش هوای و شوای (۲۰۱۲) و روش تحقیق حاضر

در بارگذاری ۴۰ کیلوگرم، زمان نشست تحکیمی کامل خاک از روش ترزاقی (۱۹۴۳) در حدود ۲۴ ساعت می باشد، در حالی که با استفاده از زهکش قائم به شعاع‌های ۰/۵، ۱، ۱/۵ و ۲ سانتی‌متر، این زمان به ترتیب برابر با ۱۸، ۱۷، ۱۶ و ۱۴ ساعت خواهد بود. بنابراین می توان بیان نمود که در مواردی که ضریب تحکیم خاک بسیار ناچیز باشد، فشار آب منفذی در مدت زمان طولانی مستهلک می شود، به خصوص اگر لایه خاک تحت تحکیم روی یک لایه نفوذ ناپذیر واقع شده باشد. یکی از راهکارها برای تسریع در روند تحکیم، احداث زهکش‌های قائم می باشد که با کوتاه کردن طول مسیر زهکشی به صورت مصنوعی، سبب تخلیه سریع تر آب از منافذ خاک می شوند و در ابعاد واقعی می توانند نشست تحکیمی کامل خاک را نسبت به روش ترزاقی (۱۹۴۳)، چند سال زودتر رقم زنند. در بسیاری از طرح‌ها که نیاز به تثبیت خاک از نظر نشست پذیری باشد، این موضوع را می توان مد نظر قرار داد. اگر مقدار نسبت $\frac{r_d}{R_e}$ کوچک تر از ۰/۳ باشد، نتایج عددی حاصل از روابط ارائه

شده برای نشست تحکیمی نسبت به زمان تحت جریان هیدرولیکی شعاعی - عمودی، منطبق بر نتایج حاصل از حل یک بعدی ترزاقی می باشد. بنابراین اگر شعاع زهکش قائم بسیار ناچیز باشد، می توان از جریان شعاعی صرف نظر نمود و معادله دیفرانسیل سرعت زمانی تحکیم را به صورت معادله یک بعدی ترزاقی (۱۹۴۳) حل نمود. البته این موضوع بستگی به طول مسیر زهکشی در حالت قائم دارد. اگر طول مسیر زهکشی قائم بسیار زیاد باشد، مقادیر ناچیز r_d نیز می توانند در روند نشست تحکیمی تأثیرگذار باشند. از طرفی مشخص گردید نتایج تحقیق حاضر که استخراج معادله‌ی تحلیلی تحکیم در جریان شعاعی - عمودی است، در تطابق با روش‌های عددی به کار گرفته شده در تحقیقات گذشته می باشد. همچنین روش تحلیلی که نتایج دقیق تری را ارائه می کند زمان مربوط به رسیدن به تحکیم مورد نظر را کمتر پیش بینی نموده و این موضوع به خصوص در راه حل‌های عددی مدنظر قرار گیرد.

در تحقیق حاضر، فاکتور زمانی T از رابطه $T = \frac{Ct}{r_d^2}$ که بدون بعد می باشد محاسبه شده و در روش وان هوان و شوای (۲۰۱۲) با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$T = \frac{kt}{-\gamma_w m_v h^2} \quad (14)$$

همان گونه که در شکل (۷-الف) نشان داده شده است، می توان گفت که زمان رسیدن به نشست تحکیمی ۵۰ درصد و ۹۰ درصد، با استفاده از روش وان هوان و شوای (۲۰۱۲) به ترتیب در حدود ۶ و ۲۴ سال می باشد؛ این در حالی است که با استفاده از روش تحقیق حاضر (رابطه ۱۳)، زمان رسیدن به نشست تحکیمی ۵۰ درصد و ۹۰ درصد به ترتیب در حدود ۶ و ۲۳ سال می باشد. بنابراین می توان اذعان داشت که روش تئوری و استخراج معادله‌ی صورت پذیرفته به درستی بوده و همخوان با نتایج عددی مورد استفاده در تحقیق وان هوان و شوای (۲۰۱۲) می باشد. به عبارتی حل سیستم تحلیلی که به طور قطع جواب‌های دقیق تری می دهد در مقایسه با زمان ۹۰ درصد تحکیم مشخص می نماید که دارای زمان واقعی کمتری بوده و از این رو حل این نوع سیستم با استخراج معادله‌ی صورت پذیرفته دارای اولویت می باشد.

نتیجه گیری

در بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی به خصوص مسائلی که دارای تقارن استوانه‌ای می باشند، معادله‌ها و توابع بسل بسیار کاربردی خواهند بود که معادله دیفرانسیل سرعت زمانی تحکیم تحت جریان هیدرولیکی شعاعی - عمودی از قبیل این مسائل خواهد بود.

منابع

- 1- Abbasi, N., Rahimi, H., Javadi, A. A. and A. Fakher. 2007. Finite difference approach for consolidation with variable compressibility and permeability. *Computers and Geotechnics*, 34: 41-52.
- 2- Di Rado, H. A., Beneyto, P. A., Mroginski, J. L. and A. M. Awruch. 2009. Influence of the saturation–suction relationship in the formulation of non-saturated soil consolidation models. *Mathematical and Computer Modelling*, 49: 1058–1070.
- 3- Liu, J. C, Lei, G. H. and M. X. Zheng. 2014. General solutions for consolidation of multilayered soil with a vertical drain system. *Geotextiles and Geomembranes*, 42: 267-276.
- 4- Lu, M. M., Xie, K. H. and S. Y. Wang. 2011. Consolidation of vertical drain with depth-varying stress induced by multi-stage loading. *Computers and Geotechnics*, 38: 1096–1101.
- 5- McKinley, J. D. 1998. Coupled consolidation of a solid, infinite cylinder using a Terzaghi formulation. *Computers and Geotechnics*, 23: 193-204.
- 6- Menendez, C., Nieto, P. J. G., Ortega, F. A. and A. Bello. 2010. Non-linear analysis of the consolidation of an elastic saturated soil with incompressible fluid and variable permeability by FEM. *Applied Mathematics and Computation*, 216: 458–476.
- 7- Ong, C. Y., Chai, J. C., T. Hino. 2012. Degree of consolidation of clayey deposit with partially penetrating vertical drains. *Geotextiles and Geomembranes*, 34: 19-27.
- 8- Qin, A., Sun, D., Yang, L. and Y. Weng. 2010. (a) A semi-analytical solution to consolidation of unsaturated soils with the free drainage well. *Computers and Geotechnics*, 37: 867–875.
- 9- Qin, A., Sun, D., and Y. Tan. 2010.(b) Analytical solution to one-dimensional consolidation in unsaturated soils under loading varying exponentially with time. *Computers and Geotechnics*, 37: 233–238.
- 10-Rani, S., Kumar, R. and S. J. Singh. 2011. Consolidation of an anisotropic compressible poroelastic clay layer by axisymmetric surface loads. *International Journal of Geomechanics*, 11: 65-71.
- 11-Tang, X., Niu, B., Cheng, G. and H. Shen. 2013. Closed-form solution for consolidation of three-layer soil with a vertical drain system. *Geotextiles and Geomembranes*, 36: 81–91.
- 12-Terzaghi, K. 1943. *Theoretical soil mechanics*, John wily and Sons Inc., NewYork.
- 13-Wan-Huan, Z. and T. Shuai. 2012. Unsaturated Consolidation in a Sand Drain Foundation by Differential Quadrature Method. *Procedia Earth and Planetary Science*, 5: 52-57.
- 14-Xie, K. H., Wang, K., Wang, Y. L. and C. X. Li. 2010. Analytical solution for one-dimensional consolidation of clayey soils with a threshold gradient. *Computers and Geotechnics*, 37: 487–493.
- 15-Zheng, J. J., Lu, Y. E., Yin, J. H. and J. Guo. 2010. Radial consolidation with variable compressibility and permeability following pile installation. *Computers and Geotechnics*, 37: 408-12.
- 16-Zhu, G. F., and J. H. Yin. 2011. Analysis and mathematical solutions for consolidation of a soil layer with depth-dependent parameters under confined compression. *International Journal of Geomechanics*, 12(4): 451-461.