روش جدید مدلسازی عددی نیم رخ جریان متغیر تدریجی بر مبنای روش نیوتن رافسون وفقی

محمد جهاندار ملک ابادی[۱]، فرهود کلاته[۲*] و یوسف حسن زاده[۳]

۱-دانشجوی کارشناسی ارشد عمران سازه های هیدرولیکی دانشگاه تبریز .
۲*- نویسنده مسئول، استادیار گروه مهندسی آب دانشکده عمران دانشگاه تبریز. fkalateh@tabrizu.ac.ir
۳-استاد گروه مهندسی آب دانشکده عمران دانشگاه تبریز.

تاریخ دریافت: ۹۳/۶/۹ تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۰/۳۰

چکیده

معادله حاکم بر جریان متغیر تدریجی، تغییرات عمق را در امتداد جریان بیان می‌کند. روش‌های مختلفی برای حل عددی نیم رخ سطح آب در جریان متغیر تدریجی ارائه شده است و یکی از مشکلات انتگرال‌گیری عددی مشخص کردن اندازه مناسب گام مکانی انتگرال گیری می‌باشد. در این مقاله روش جدید نیوتن رافسون وفقی برای حل عددی معادله حاکم بر جریان متغیر تدریجی توسعه داده شده است. در این روش گام‌های محاسباتی براساس میزان خطای عددی برآورد شده در حین محاسبات تعیین می‌شوند، چنین روندی به صورت هوشمندانه بوده و لذا موجب افزایش دقت و سرعت در محاسبه نیم رخ سطح آب در جریان متغیر تدریجی می‌گردد. مثال‌های متعددی با استفاده از روش پیشنهادی تحلیل گردید و با نتایج حاصل از تحقیقات قبلی مقایسه و دقت و صحت روش پیشنهادی بررسی و همچنین مقایسه‌ای با روش رانگ کوتای وفقی انجام شد. نتایج بدست آمده نشان دهندهٔ دقت بسیار مناسب روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های گام مستقیم و رانگ کوتای وفقی می باشد بطوریکه در یکی از مثال های ارائه شده در مقاله ، نتایج حاصل از۱۰ گام محاسباتی روش نیوتن رافسون وفقی توسعه داده شده تقریبا" مساوی۹۰ گام محاسباتی روش گام مستقیم گردید.

کلید واژه‌ها: جریان متغیر تدریجی، روش نیوتن رافسون، الگوی روش وفقی، پروفیل سطح آب، اندازه گام.

A Novel Method for Numerical Simulation of Gradually Varied Flow Profile Based on Adaptive Newton Raphson method

M. Jahandar Malekabadi[1], F. Kalateh[2*] and Y. Hassanzadeh[3]

1- M.Sc. Student, Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz.
2*- Corresponding Author, Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz.
3-Professor, Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz.

Received:31 August 2014 Accepted:20 January 2016

Abstract

The basic equation of Gradually Varied Flow (GVF) describes the variation of water depth with flow process. Several methods have been developed for numerical solution of the water surface profile in GVF and one of the challenges of numerical integration is determining the appropriate integration spatial step size. In this paper a novel Adaptive Newton-Raphson method is developed for numerical solution of the GVF equation. In this method the spatial steps are determined by using error estimation during calculation, this procedure is smart and increases accuracy and speed of computation the water surface profile in GVF. Several examples were analyzed using the proposed method and compared with the results of previous researches and the accuracy of the proposed method was evaluated. The results indicate good accuracy of the proposed method in comparison with other methods. As shown in one of examples presented in the paper, the obtained results from 10 step of developed Adaptive Newton-Raphson method approximately equal with 90 step of standard direct step method.

Keywords: Gradually varied flow, Newton Raphson method, Adaptive pattern, Water surface profiles, Step size.

مقدمه

تغییرات تدریجی عمق جریان در مواجهه با سازه ها و موانع موجود در مسیر که در واقع این تغییر در جهت متعادل سازی مولفه وزن با مولفه شتاب قائم جریان ایجاد می‌گردد، به جریان متغیر تدریجی مرسوم می‌باشد. برآورد دقیق منحنی سطح آب در جریان متغیر تدریجی برای طراحی و برنامه‌ریزی مسائل مربوط به آب اهمیت ویژه‌ای دارد. تقریبا بخش مهمی از فعالیت‌های مهندسی هیدرولیک در جریان کانال باز درگیر محاسبات نیم رخ جریان متغیر تدریجی است. فرد و هاربو[۱] (۱۹۷۱) نیم رخ جریان متغیر تدریجی را با استفاده از روش تکرار نیوتن محاسبه نمودند. شفر[۲] (۱۹۸۵)یک برنامه کامپیوتری برای جریان متغیر تدریجی در محل پس زدگی آب به روش گام به گام استاندارد در کانال با مقطع نامنظم توسعه داد. زقلال و دارویش[۳](۱۹۸۷)یک نرم افزار برای حل مسئله جریان متغیر تدریجی بر پایه روش گام مستقیم توسعه دادند و همچنین زقلال و انوار[۴] (۱۹۹۱) مدل کامپیوتری انتگرال گیری با استفاده از چهار یا پنج نقطه گوس و تربیع وفقی سیمپسون برای انتگرال‌گیـری عددی معادله جریان متغیر تدریجی در کانال ذوزنقه ای ارائه نمودند.ردس[۵] (۱۹۹۸) حل عددی با استفاده از روش نیوتن رافسون در ترکیب با روش گام استاندارد برای محاسبه نیم‌رخ جریان متغیر تدریجی توسعه داد و همچنین این حل را بر مبنای معادله های مانینگ، شزی و کول بروک وایت نیز ارائه داده است.دوبین[۶](۱۹۹۹) معادله یک بعدی برای پروفیل جریان متغیر تدریجی دائمی با دبی ثابت در کانال منشوری مستطیلی با زبری ثابت و شیب طولی کم ارائه داد که معادله دیفرانسیلی جریان توسط تقریب چند جمله‌ای تغییر پیدا کرد و سپس حل معادله به وسیله روند انتگرال‌گیری ریاضی به دست آمد.دی[۷](۲۰۰۰)یک حل عددی به روش چابیشف[۸]در ترکیب با روش گام استاندارد برای محاسبه پروفیل جریان متغیر تدریجی در کانال بدون استفاده کردن از رجوع به جدول‌ها، روند درون یابی و با فرض های ساده کننده هندسه سطح مقطع ارائه داد.ژانگ و همکاران[۹](۲۰۰۵) یک حل به روش تکرار به منظور جایگزین روش صحیح و خطا برای محاسبه تراز سطح آب در جریان متغیر تدریجی ارائه دادند. کایا[۱۰](۲۰۱۱) پروفیل سطح آب را در جریان متغیر تدریجی با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی[۱۱] که جدیدا در مهندسی هیدرولیک استفاده شده است محاسبه نمود و همچنین نیم‌رخ جریان متغیر تدریجی برای شیب ملایم و شیب تند در کانال ذوزنقه را با این روش به دست آورد، نتایج بدست آمده از این تحقیق نشان داد که روش تربیع دیفرانسیلی بطور کامل نتوانست خطا را در بدست آوردن نیم‌رخ جریان متغیر تدریجی کنترل کند و در بعضی از پروفیل ها در مقطعی که تغییرات نیم‌رخ جریان کم است گام محاسباتی کوچک است. لیزهانگ و همکاران[۱۲] (۲۰۱۱) تحقیقی در خصوص روش رانگ کوتای مرتبه چهار برای حل معادله دیفرانسیل جریان متغیر تدریجی بطور مستقیم انجام دادند و دو مدل حل برای پروفیل سطح آب با گام انتگرال‌گیری ثابت ارائه دادند. کرناتسکی[۱۳](۲۰۱۱) مقایسه ای بین عمق به دست آمده از فرمول تحلیلی برس[۱۴] و حل عددی انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای در کانال مستطیلی با عرض نامحدود (عریض) در جریان متغیر تدریجی دائمی انجام داد. تا زمان انجام تحقیق حاضر، برای جریان متغیر تدریجی هیچ حل عددی که بتواند خطا را کنترل و یا در محدوده مورد نظر قرار دهد و با گام‌های محاسباتی متغیر و هوشمند و با کمترین زمان و حجم محاسبات و دقت بالا گزارش نشده است.

روش‌های مختلفی برای حل معادله پروفیل سطح آب ارائه شده است و به دلیل اینکه حل مستقیم این معادله دشوار است، روش گام استاندارد یک روش جامع برای محاسبه نیم‌رخ جریان متغیر تدریجی است که در مقاله حاضر از روش نیوتن رافسون استفاده شده است و این روش به دلیل اینکه برای صحت سنجی روش‌های دیگر زیاد استفاده می‌شود، اهمیت بسیاری دارد. به دلیل اینکه در روش نیوتن رافسون نقاط زیادی در محاسبه عمق جریان برای دقت مورد نظر در نظر گرفته می‌شود، روش نیوتن رافسون وفقی ارائه می‌شود. روش حل وفقی در محل‌هایی که تغییرات تابع تدریجی باشد از اندازه گام بزرگ و در مقطعی که تغییرات تابع سریع باشد، با احتمال خطای محاسباتی بالا، از اندازه گام کوچک استفاده می‌کند که این باعث صرفه جویی در زمان و هزینه حل می‌شود.

در مقاله حاضر ابتدا معادله های جریان متغیر تدریجی بررسی شده است، پس از آن روش نیوتن رافسون وفقی شرح داده می‌شود و با استفاده از این روش منحنی‌های مختلف جریان متغیر تدریجی به دست می‌آیند و با روش گام مستقیم صحت سنجی و همچنین با روش رانگ کوتای وفقی[۱۵] مقایسه می‌شود و در آخر تغییرات نیم‌رخ سطح آب در اثر افزایش ارتفاع رسوب به منظور نشان دادن کاربرد روش ارائه شده بررسی شده است.

1-Fread and Harbaugh
2-Schaefer
3-Zaghloul and Darwish
4- Zaghloul and Anwar
5-Rhodes
6-Dubin
7-Dey
8-Chebyshev
9-Zhang *at al.*
10-Kaya
11-Differential quadrature method
12- Lizhang *et al.*
13-Kurnatowski
14-Bresse
15-Adaptive Runge Kutta method(ARKM)

مواد و روش ها

جریان متغیر تدریجی[1]

معادله دیفرانسیل مربوط به نیم‌رخ سطح آب جریان متغیر تدریجی به صورت رابطه (۱) است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s_o - s_f}{1 - Fr^2} = f(x, y) \quad (۱)$$

در معادله (۱) y;عمق آب x; طول در جهت جریان، s_o ;شیب طولی کف کانال، s_f ;شیب خط انرژی و Fr;عدد فرود، عدد فرود توسط رابطه (۲) قابل محاسبه می‌باشد. در این معادله $\propto \approx 1$ و $\cos\theta \approx 1$ فرض شده است.

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{gA^3} \quad (۲)$$

به دلیل اینکه فرمول مانینگ در مسائل مهندسی کاربردی است و بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد برای s_f از معادله مانینگ استفاده شده است و به صورت رابطه (۳) است (فرض آن است که کاربرد معادله مانینگ در جریان متغیر تدریجی با جانشین کردن s_f (شیب اصطکاک) به جای شیب کف صادق است(S_o)):

$$s_f = \left(\frac{nQ}{AR^{\frac{2}{3}}}\right)^2 \quad (۳)$$

پارامترهای مقطع جریان برای کانال با مقطع ذوزنقه‌ای به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شوند.

$$A = (b + my)y, R_H = \frac{(b+my)y}{b+2y\sqrt{1+m^2}}, \quad B = b + 2my \quad (۴)$$

در این رابطه‌ها A ;مساحت سطح مقطع، R;شعاع هیدرولیکی، n; ضریب مانینگ، Q; دبی، g;شتاب گرانش، B;عرض بالای سطح آب، b;عرض کف کانال و m;شیب کناره کانال ذوزنقه‌ای می‌باشند.

روش نیوتن رافسون وفقی[2]

با داشتن y_i و استفاده از روش نیوتن رافسون، ابتدا یک y_{i+1}را انتخاب نموده ($y_{i+1} = Y_{i+1}$)و در گام های بعدی به اندازه ΔY تغییر داده می شود با این توضیح که مقدار ΔY و y_{i+1} جدید از رابطه (۵) معلوم می شوند و این کار تکرار می‌شود تا زمانی که دقت مورد نظر حاصل گردد (کین کید و چنی[3]، ۱۹۹۰).

$$y_{i+1} = Y_{i+1} + \Delta Y \quad , \quad \Delta Y = -\frac{F(Y_{i+1})}{F'(Y_{i+1})} \quad (۵)$$

در روش نیوتن رافسون $F(Y_{i+1})$و $F'(Y_{i+1})$ در کانال با مقطع ذوزنقه ای با شیب کناره های یکسان در جریان زیر بحرانی به ترتیب از رابطه‌های (۶) و (۷) و برای جریان فوق بحرانی از رابطه‌های (۸) و (۹) به دست می‌آیند (فرد و هاربو، ۱۹۷۱).

$$F(Y_{i+1}) = y_{i+1} + \frac{{Q_{i+1}}^2}{2gA^2} - \frac{S_{f(i+1)}}{2}\Delta x - y_i - \frac{{Q_i}^2}{2g} + \left(s_o - \frac{S_{fi}}{2}\right)\Delta x \quad (۶)$$

$$F'(Y_{i+1}) = 1 - \frac{{Q_{i+1}}^2}{gA^2} \times \frac{2(b+2my_{i+1})}{(2b+2my_{i+1})y_{i+1}} + \frac{1}{3}\Delta x S_{f(i+1)}\left[\frac{10(b+2my_{i+1})}{(2b+2my_{i+1})y_{i+1}} - \frac{4\sqrt{1+m^2}}{b+2y_{i+1}\sqrt{1+m^2}}\right] \quad (۷)$$

$$F(Y_{i+1}) = y_{i+1} + \frac{{Q_{i+1}}^2}{2gA^2} + \frac{S_{f(i+1)}}{2}\Delta x - y_i - \frac{{Q_i}^2}{2g} + \left(s_o + \frac{S_{fi}}{2}\right)\Delta x \quad (۸)$$

$$F'(Y_{i+1}) = 1 - \frac{{Q_{i+1}}^2}{gA^2} \times \frac{2(b+2my_{i+1})}{(2b+2my_{i+1})y_{i+1}} - \frac{1}{3}\Delta x S_{f(i+1)}\left[\frac{10(b+2my_{i+1})}{(2b+2my_{i+1})y_{i+1}} - \frac{4\sqrt{1+m^2}}{b+2y_{i+1}\sqrt{1+m^2}}\right] \quad (۹)$$

در جریان زیر بحرانی، y_i ;عمق پایین دست و در جریان فوق بحرانی، y_i ;عمق بالا دست است. ارتگا و رینبولت[4] (۱۹۷۰) ، سیکروسکی[5] (۲۰۰۱) و فری و بردن[6] (۲۰۱۲) از این روش برای مسایل غیر خطی استفاده کردند. پادوان و سراپنگ[7] (۱۹۸۳) یک نوع روش نیوتن رافسن وفقی را ارئه دادند و همچنین چای و همکاران[8](۱۹۸۹)روشی بر مبنای روش نیوتن رافسن وفقی برای حل مسائل غیر خطی دو بعدی ارائه دادند.

1 - Gradually varied flow
2-Adaptive Newton Raphson(ANRM)
3 - Kincaid and Cheney
4-Reinbolt
5-Sikorski
6-Burden
7-Surapong
8-Chyi *et al.*

یکی از مشکلات انتگرال‌گیری عددی معادله حاکم بر جریان متغیر تدریجی، مشخص کردن اندازه مناسب گام انتگرال‌گیری است. اگر گام محاسباتی بزرگ باشد، ممکن است خطای برشی قابل قبول نباشد و اگر گام محاسباتی کوچک باشد زمان محاسبات و هزینه محاسبات زیاد می‌شوند،به علاوه اندازه گام ثابت برای کل محدوده انتگرال‌گیری مناسب نیست. برای مثال، بهتر است در مقطع عرضی که تغییرات منحنی زیاد است از اندازه گام کوچک و با هموار شدن منحنی از اندازه گام بزرگ تر استفاده شود که برای رسیدن به این هدف از الگوریتم حل وفقی استفاده می‌شود. این الگوریتم در هر گام خطای برشی E_iرا تخمین می‌زند و به صورت هوشمند اندازه گام را برای خطای مورد نظر ε تنظیم می‌کند. در روش نیوتن رافسون وفقی جدید ارائه شده در این مقاله، دو تکرار انجام می‌گیرد که تکرار اول برای تخمین خطا و تکرار دوم که دقیق‌تر است برای جواب نهایی حل می‌باشد. برای برآورد خطای هر گام از اختلاف تکرار اول و تکرار دوم استفاده شده است و در هر گام خطای برشی E_i (رابط۱۰) را تخمین می‌زند و به صورت هوشمند اندازه گام را برای خطای مورد نظر ε تنظیم می‌کند. در واقع برآورد خطا بین دو گام متوالی انجام می‌شود. به دلیل اینکه از تکرار اول برای محاسبه خطا و گام هوشمند استفاده می‌شود، نیاز به محاسبات اضافی اندکی دارد:

$$E_i(\Delta x) = \left| y_{m\,\text{تکرار}} - y_{m+1\,\text{تکرار}} \right| \qquad (۱۰)$$

خطای برشی در هر گام نیوتن رافسون از$C\Delta x^2$تبعیت می‌کند که Cضریب ثابت می‌باشد و این ضریب بستگی به حل جواب های x، تابع fو مشتقات جزئی در x دارد. در نتیجه

$$\frac{E(\Delta x_1)}{E(\Delta x_2)} \approx \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2 \qquad (۱۱)$$

ابتدا محاسبات را با گام Δx_1 انجام داده بطوریکه خطا $E(\Delta x_1)$ نتیجه می‌شود و پس از آن گام Δx_2 را بنحوی تخمین می زنیم که خطای محاسباتی از خطای مجاز تعریف شده کوچکتر باشد برای این منظور رابطه (۱۱) با قرار دادن $E(\Delta x_2) = \varepsilon$ بصورت رابطه (۱۲) بدست می‌آید کهε محدوده خطای قابل قبول می‌باشد:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \left(\frac{\varepsilon}{E(\Delta x_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۲)$$

برای اندازه گام جدید در برنامه رایانه‌ای نوشته شده از رابطه (۱۳) استفاده شده است:

$$\Delta x_{New} = \Delta x \left(\frac{\varepsilon}{E_i(\Delta x)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۳)$$

در برنامه کامپیوتری نوشته شده $\varepsilon = 0.01$ در نظر گرفته شد و جواب‌هایی که خطای آن کمتر از ε باشند مورد قبول می‌باشند و جواب‌های که خطای آن بزرگ تر از ε باشند یا اندازه گام مکانی کوچک می‌شود و یا یک تکرار دیگر انجام می‌شود و برآورد خطا بین تکرار دوم و سوم انجام می‌شود و جواب نهایی از تکرار سوم نتیجه می‌شود و این تکرارها انجام می‌شوند تا نتایج مورد قبول واقع شوند و خطای هر گام بین دو تکرار متوالی محاسبه می‌شود. در اینجا چون حل دقیقی از معادله وجود ندارد، می‌توان برای تخمین خطا از نرم حداکثر برای کنترل بیشترین خطای برشی استفاده نمود و اندازه تقریبی خطا به صورت رابطه (۱۴) به‌دست می‌آید.

$$\text{خطا} = max_i |E_i(\Delta x)| \qquad (۱۴)$$

نتایج و بحث

در این بخش مثال‌های متعددی با استفاده از روش پیشنهادی تحلیل گردیده است و با نتایج حاصل از تحقیقات قبلی مقایسه و دقت و صحت روش پیشنهادی بررسی و همچنین مقایسه‌ای با روش رانگ کوتای وفقی انجام شده است. هدف از مسئله اول کاربرد روش توسعه داده شده در به دست آوردن نیم‌رخ‌های مختلف جریان متغیر تدریجی، همچنین بررسی دقت و صحت روش ارائه شده با روش گام مستقیم[1] و مقایسه با روش رانگ کوتای وفقی است که کانال منشوری با مقطع ذوزنقه‌ای در دو شیب کف کانال کم و زیاد به ترتیب 0.001 و 0.01 انتخاب شده است. عرض کف (b)برابر ۵ متر، شیب جداره کانال(m)برابر ۱:۱،دبی جریان برابر ۲۰ مترمکعب بر ثانیه و ضریب مانینگ ۰/۰۲ می‌باشند. الگوریتم کلی حل توسط زبان برنامه نویسی فرترن ۹۵[2] توسعه داده شده است.

برای مثال بیان شده، تفاوت میان عمق‌های حاصل از روش نیوتن رافسون وفقی و گام مستقیم در جدول های ۱، ۲ و ۳ نمایش داده شده است که در این جدول‌ها برای پروفیل M1محاسبات برای ۹ نقطه و برای پروفیل‌های دیگر برای ۱۳ نقطه نشان داده شده است. همچنین، درصد تفاوت‌ها با رابطه (۱۵) مشخص شده‌اند و مقدار آنها در جدول‌ها نمایش داده شده‌است، دیده می‌شود که اختلاف بین روش گام مستقیم و روش ارئه شده خیلی کم است و این نشان از دقت محاسباتی بالای این روش است.

1-Direct step method(DSM)
2-Fortran95

$$\text{درصد تفاوت} = \frac{\left|y_{\text{روش ارائه شده}} - y_{\text{گام مستقیم}}\right|}{y_{\text{نرمال}}} \times 100 \qquad (۱۵)$$

مطابق این جدول‌ها بیشترین درصد تفاوت ها در نیم‌رخ‌های M1، M2 وM3به دست آمده از روش نیوتن رافسون وفقی به ترتیب ۰/۰،۰۶۹/۲۸ و۰/۳۷ درصد می‌باشند. بطور مشابه بیشترین درصد تفاوت ها برای نیم‌رخهای S1، S2 و S3با روش نیوتن رافسون وفقی۱/۰،۵/۰۷۸و۰/۶۷ درصد می‌باشند. نتایج همین مثال توسط کایا، ۲۰۱۱با روش تربیع دیفرانسیلی بدست آمد و بیشترین درصد تفاوت ها برای نیم‌رخهای M1، M2 وM3 به ترتیب ۰/۱۴، ۲/۱ و ۱/۴ و برای نیم‌رخ‌های S1، S2 و S3 به ترتیب ۰/۰۰۱۸،۰/۳۲/۰و۲/۱درصد نتیجه شدند. یکی از خروجی‌های این برنامه رایانه ای خطای برشی در هر گام است که بیشترین مقدار این خطا برای هر پروفیل در جدول (۴) نمایش داده شده و همچنین تفاوت بین بیشترین خطای برشی و بیشترین تفاوت نسبت به روش گام مستقیم حاصل شده است. طبق این جدول دیده می‌شود که این تفاوت‌ها خیلی کم است و بیشترین تفاوت در روش نیوتن رافسون وفقی۰/۰۰۹۶۶۲۴ است و در اینجا نتیجه می‌شود که حداکثر خطای برشی می تواند تقریب خیلی مناسبی از خطا در روش نیوتن رافسون وفقی باشد.

جدول ۱- تفاوت و درصد تفاوت عمق‌های به دست آمده از روش نیوتن رافسون وفقی و روش گام مستقیم برای نیم‌رخ‌های S1 و S2

نیم‌رخS2			نیم‌رخS1		
درصد تفاوت	تفاوت (متر)	X (متر)	درصد تفاوت	تفاوت (متر)	X (متر)
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۰۰۶	۰/۰۱۰۰۰۰۰	۰/۰۱۲	-۰/۰۰۰۱۰۳	۰/۰۱۰۰۰۰۰
۱/۱	۰/۰۰۹۵۳۰۵۰	۰/۱۰۳۱۸۷۲	۰/۰۱۲	-۰/۰۰۰۱۰۶	۰/۰۳۵۲۲۱۵۶
۰/۰۳۲	۰/۰۰۰۲۷۷	۰/۲۶۲۵۲۸۵	۰/۰۰۷۴	-۰/۰۰۰۰۶۵	۰/۱۱۹۱۷۵۳۰
۰/۰۳۵	۰/۰۰۰۳۰۲	۰/۶۰۹۰۲۳۲	۰/۰۳۳	۰/۰۰۰۲۹۲	۱/۳۳۴۹۵۶۰۰
/۰۳۶	۰/۰۰۰۳۱۲۱	۱/۲۴۵۰۰۱۰	۰/۰۱۱	۰/۰۰۰۰۹۳	۳/۴۹۴۸۴۲۰۰
/۰۳۷	۰/۰۰۰۳۲۷	۲/۳۸۹۹۱۰۰	۰/۰۱۳	۰/۰۰۰۱۱۳۰۰	۵/۶۷۴۲۲۴۰۰
۰/۰۴۰	۰/۰۰۰۳۴۶۹۵	۴/۳۷۲۳۵۰۰	۰/۰۱۹	۰/۰۰۰۱۶۸۰۰	۹/۶۰۷۲۸۵۰۰
۰/۰۴۴	۰/۰۰۰۳۸۳۳۵	۷/۷۵۷۴۴۷۰	۰/۰۲۶	۰/۰۰۰۲۳۰۰۰	۱۴/۵۹۹۹۹۰۰
۰/۰۵۳	۰/۰۰۰۴۶۰	۱۳/۵۶۰۷۸۰	۰/۰۳۷	۰/۰۰۰۳۲۰۵۰	۲۱/۵۱۶۳۲۰۰
۰/۰۷۳	۰/۰۰۰۶۳۸۵	۲۳/۸۴۶۳۱۰	۰/۰۴۹	۰/۰۰۰۴۲۹۰۰	۳۰/۴۹۸۳۰۰
۰/۱۲	۰/۰۰۱۰۶۲۷۵	۴۳/۶۶۳۶۷۰	۰/۰۶۲	۰/۰۰۰۵۴۳۰۰	۴۲/۱۶۱۸۲۰۰
۱/۵	-۰/۰۱۳۰۸۲۴	۸۹/۹۲۰۱۸۰	۰/۰۷۸	۰/۰۰۰۶۸۳۰۰	۵۷/۱۴۱۳۲۰۰

جدول۲- تفاوت و درصد تفاوت عمق‌های به دست آمده از روش نیوتن رافسون وفقی و روش گام مستقیم برای نیم‌رخهای S3 و M1

نیم‌رخM1			نیم‌رخS3		
درصد تفاوت	تفاوت (متر)	X(متر)	درصد تفاوت	تفاوت (متر)	X (متر)
۰/۲۸	-۰/۰۰۴۸۱۷	۱۷۲۵/۳۵۶۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۰۲۲	۰/۰۰۰۳۶۶	۱۱۸۸/۸۷۵۹	۰/۰۳۹	-۰/۰۰۰۳۴۰۵۴	۰/۵۰۰۰۰
۰/۰۱۴	۰/۰۰۰۲۳۵	۸۹۳/۶۹۲۶۰	۰/۰۹۶	-۰/۰۰۰۸۳۷۰۵	۱/۲۱۴۲۱۹
۰/۰۰۲۷	-۰/۰۰۰۰۴۶	۷۱۲/۷۰۱۵۰	۰/۱۶	-۰/۰۰۱۳۶۸۵۵	۲/۲۲۶۸۸۸
۰/۰۰	۰/۰۰۰۰	۶۱۲/۷۰۱۵۰	۰/۲۲	-۰/۰۰۱۹۱۳۸۹۵	۳/۵۹۹۰۴۸
۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۴۲	۵۱۲/۷۰۱۵۰	۰/۲۸	-۰/۰۰۲۴۶۰۳۲	۵/۳۸۲۶۸۳
۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۰۱۴۵	۳۷۷/۰۶۹۴۰	۰/۳۴	-۰/۰۰۲۹۹۰۷۶	۷/۶۲۶۰۶۶
۰/۰۳۱	۰/۰۰۰۵۲۹	۱۴۹/۸۸۸۵۰	۰/۴	-۰/۰۰۳۵۰۸۸	۱۰/۳۷۴۰۳
۰/۰۵۲	۰/۰۰۰۸۹۱	۱۴۲/۹۱۱۵۰	۰/۴۶	-۰/۰۰۴۰۰۹۷	۱۳/۶۶۸۰۲
			۰/۵۱	-۰/۰۰۴۴۹۲۱۵	۱۷/۵۴۶۲۱
			۰/۵۷	-۰/۰۰۴۹۵۵۱	۲۲/۰۴۳۷۰
			۰/۶۲	-۰/۰۰۵۳۹۷۱	۲۷/۱۹۲۸۷
			۰/۶۷	-۰/۰۰۵۸۱۷۲	۳۳/۰۲۳۹۱

جدول ۳- تفاوت و درصد تفاوت عمق‌های به دست آمده از روش نیوتن رافسون وفقی و روش گام مستقیم برای نیم‌رخهای M2 و M3

نیم‌رخM3			نیم‌رخM2		
درصد تفاوت	تفاوت (متر)	X (متر)	درصد تفاوت	تفاوت (متر)	X (متر)
۰/۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰
۰/۰۰۰۰۲۹	−۰/۰۰۰۰۰۰۵	−۰/۰۱۰۰۰۰	۰/۰۴۳	−۰/۰۰۰۷۴	−۰/۰۲۰۰۰۰
۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۰۰۲۹	−۰/۵۳۸۷۹۱۳	۰/۰۳	−۰/۰۰۰۵۱۶	−۰/۰۵۳۹۲۰۸۱
۰/۰۰۲۹	−۰/۰۰۰۰۴۹	−۱/۴۰۸۲۲۹۰	۰/۰۲۶	−۰/۰۰۰۴۴۹	−۰/۱۶۵۷۴۳۷۰
۰/۰۰۵۲	−۰/۰۰۰۰۸۸۸۵	−۳/۲۹۶۷۳۷۰	۰/۰۲۳	−۰/۰۰۰۳۸۵	−۰/۳۹۱۶۵۵۰۰
۰/۰۰۵۶	−۰/۰۰۰۰۹۵۱	−۵/۸۶۲۳۳۴۰	۰/۰۲۱	−۰/۰۰۰۳۵۹	−۰/۸۶۱۵۱۸۵۰
۰/۰۰۳۴	−۰/۰۰۰۰۵۷۸۵	−۱۰/۷۲۹۰۱۰	۰/۰۲۰	−۰/۰۰۰۳۴۸	−۱/۷۴۸۲۱۵۰۰
۰/۰۰۰۹۴	۰/۰۰۰۰۱۶۰۵	−۱۶/۱۱۰۵۸۰	۰/۰۲۱	−۰/۰۰۰۳۵۷۵	−۳/۳۵۸۱۵۷۰۰
۰/۰۲۶	۰/۰۰۰۴۵	−۲۵/۳۸۳۲۸۰	۰/۰۲۳	−۰/۰۰۰۳۹۲	−۶/۱۷۶۸۱۰۰
۰/۰۴۳	۰/۰۰۰۷۳۲	−۳۳/۵۹۰۷۱۰	۰/۰۲۷	−۰/۰۰۰۴۶۴	−۱۱/۰۰۶۸۹۰۰
۰/۱۳	۰/۰۰۲۲۴۱۶۵	−۴۷/۰۷۲۳۳۰	۰/۰۳۵	−۰/۰۰۰۵۹۱	−۱۹/۲۰۰۷۳۰۰
۰/۱۶	۰/۰۰۲۸۰۲۹	−۵۶/۵۵۵۴۸۰	۰/۰۴۷	−۰/۰۰۰۷۹۹	−۳۳/۱۴۸۶۰۰۰
۰/۳۷	۰/۰۰۶۲۹۷۴۵	−۷۱/۸۹۸۲۸۰	۰/۰۶۹	−۰/۰۰۱۱۷۹	−۵۷/۳۸۸۲۳۰۰

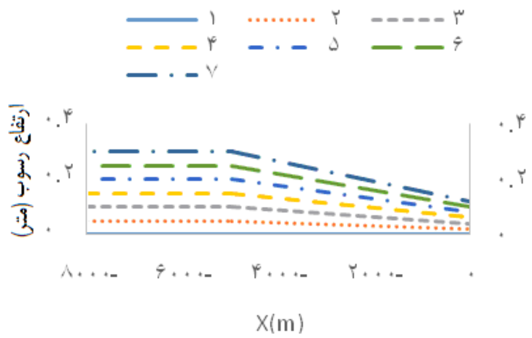
جدول ٤- مقایسه بین بیشترین خطای برشی و بیشترین تفاوت بین روش نیوتن رافسون وفقی نسبت به روش گام مستقیم برای نیم‌رخ‌های مختلف جریان متغیر تدریجی

۱	۲	۳	۴	۵	۶
بیشترین تفاوت بین روش نیوتن رافسون وفقی و روش گام مستقیم (متر)	بیشترین خطای برشی (متر)	تفاوت بین ستون ۱ و ۲(متر)	بیشترین تفاوت بین روش نیوتن رافسون وفقی و روش گام مستقیم (متر)	بیشترین خطای برشی (متر)	تفاوت بین ستون ۴ و ۵(متر)
	نیم‌رخM1			نیم‌رخM2	
۰/۰۰۴۸۱۷	۰/۰۰۰۰۷۴۲	۰/۰۰۴۷۴۲۸	۰/۰۰۱۱۷۹	۰/۰۰۳۴۸	۰/۰۰۲۳۰۱
	نیم‌رخM3			نیم‌رخS1	
۰/۰۰۶۲۹۷۴۵	۰/۰۰۲۹۷	۰/۰۰۳۳۲۷۴۵	۰/۰۰۰۶۸۳	۰/۰۰۹۸۲	۰/۰۰۹۱۳۷
	نیم‌رخS2			نیم‌رخS3	
۰/۰۱۳۰۸۲	۰/۰۰۳۴۲	۰/۰۰۹۶۶۲۴	۰/۰۰۵۸۱۷۲	۰/۰۰۸۰۷	۰/۰۰۲۲۵۲۸

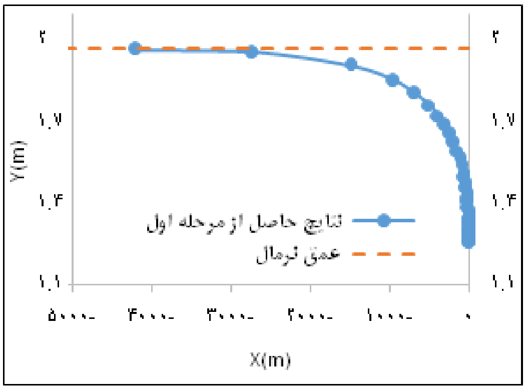
هدف از مثال دوم کاربرد روش توسعه داده شده در بررسی تغییرات نیم‌رخM2 در اثر رسوبگذاری کف کانال به صورت شیبدار با روش ساده شده پیشنهادی می‌باشد. به همین منظور کانالی با مقطع ذوزنقه‌ای و با مشخصات زیر انتخاب گردید:
عرض کف برابر ۴/۵ متر ، شیب جداره کانال ۱ افقی به ۱ قائم ، ضریب زبری کانال ۰/۰۱۳ ، شیب بستر کانال ۰/۰۰۰۴ و دبی جریان ۲۳ مترمکعب بر ثانیه. در این مثال، روش نیوتن رافسون با استفاده از تکرار دوم و سوم وفقی شده است که در این حالت اگرچه نقاط محاسبه زیادتر است ولی دقت حل بالاتر رفته است و پروفیل M2 در هفت مرحله به دست آمده است که در شکل (۱) ارتفاع رسوب برای مراحل مختلف در طول کانال نمایش داده شده است و معادله های سطح شیبدار در مرحله اول ، $h = 0$، در مرحله دوم $h = \frac{0.03x}{-5000} + 0.02$، در مرحله سوم $h = \frac{0.06x}{-5000} + 0.04$، در مرحله چهارم $h = \frac{0.09x}{-5000} + 0.06$، در مرحله پنجم $h = \frac{0.12x}{-5000} + 0.08$، در مرحله ششم $h = \frac{0.15x}{-5000} + 0.1$ و در مرحله هفتم $h = \frac{0.18x}{-5000} + 0.12$ می باشند. شکل‌های (۲) تا (۸) تغییرات نیم‌رخ جریان را برای این هفت مرحله نشان می‌دهند که نیم خطاها مربوط به عمق نرمال[1] بالادست است. 1ANR مربوط به نتایج به دست آمده از روش نیوتن رافسون وفقی در مرحله یک است. همان طور که دیده می‌شود با افزایش ارتفاع رسوب قسمتی از پروفیل M2 به M1 تبدیل شده است و هر چه این ارتفاع

1 - y_uniform

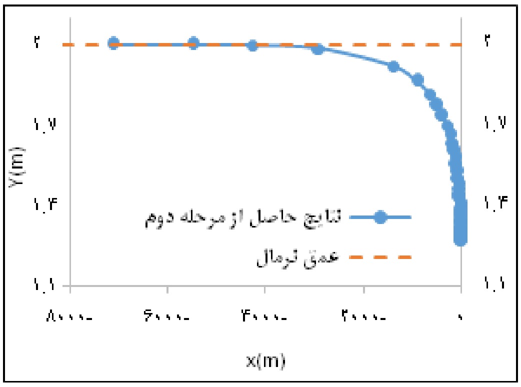
افزایش یافته قسمت بیشتری از پروفیل جریان به پروفیل M1 تبدیل شده است. در مرحله یک که کانال بدون رسوب است، کل پروفیل جریان فقط در محدوده پروفیل M2 است و زیر عمق نرمال می‌باشد و از مراحل دوم تا هفتم با افزایش شیبدار ارتفاع رسوب، پروفیل جریان در طول بیشتری در محدوده پروفیل M1 قرار گرفته است و طول پروفیل جریان متغیر تدریجی هم افزایش پیدا کرده است.



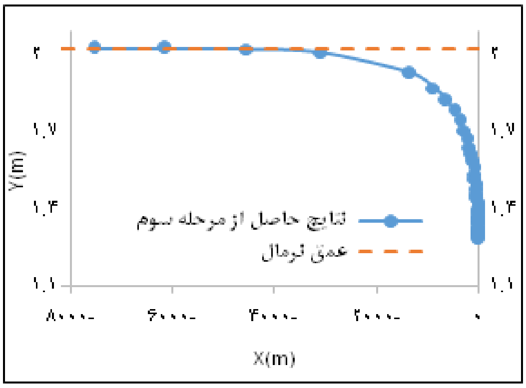
شکل ۱- تغییرات تراز کف کانال در اثر افزایش ارتفاع رسوب



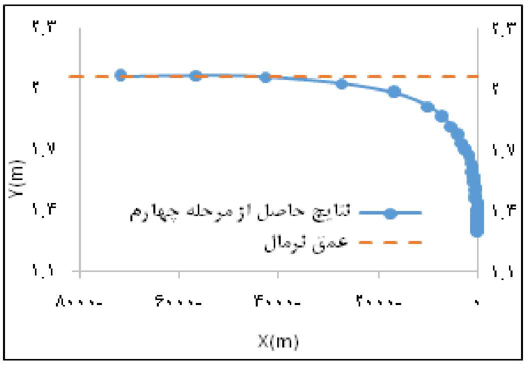
شکل ۲- نیم رخ M2 با روش نیوتن رافسون وفقی در حالت بدون رسوب (مرحله اول)



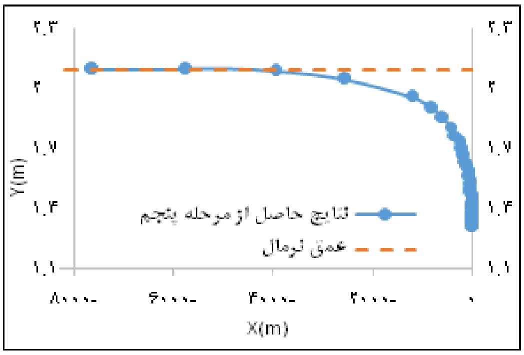
شکل ۳- نتایج حاصل از افزایش ارتفاع رسوب با روش نیوتن رافسون وفقی برای مرحله دوم



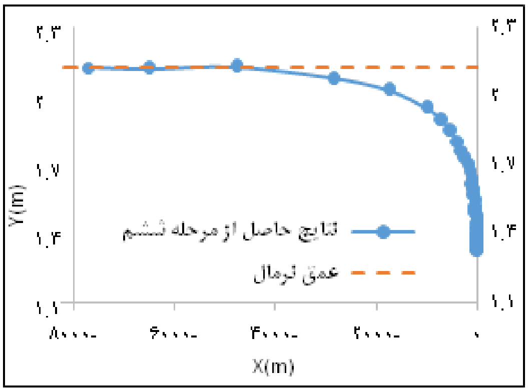
شکل ٤- نتایج حاصل از افزایش ارتفاع رسوب با روش نیوتن رافسون وفقی برای مرحله سوم



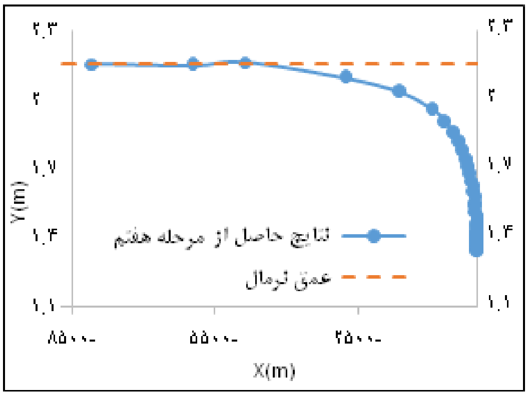
شکل ٥- نتایج حاصل از افزایش ارتفاع رسوب با روش نیوتن رافسون وفقی برای مرحله چهارم



شکل ٦- نتایج حاصل از افزایش ارتفاع رسوب با روش نیوتن رافسون وفقی برای مرحله پنجم



شکل ۷- نتایج حاصل از افزایش ارتفاع رسوب با روش نیوتن رافسون وفقی برای مرحله ششم



شکل ۸- نتایج حاصل از افزایش ارتفاع رسوب با روش نیوتن رافسون وفقی برای مرحله هفتم

نتیجه گیری

یکی از اصلی‌ترین هدف روش‌های حل عددی مسائل، کاهش حجم محاسبات و افزایش دقت است که در این راستا روش جدید نیوتن رافسون وفقی برای محاسبه دقیق‌تر و سریع تر نیمرخ سطح آب در جریان متغیر تدریجی ارائه شد. دقت روش نیوتن رافسون وفقی به تعداد تکرار بستگی دارد و هر چه تعداد تکرار بیشتر باشد نتایج به روش گام مستقیم نزدیک تر می‌شود. کارایی این روش با آزمون چند مثال عملی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده در یکی از مثال‌ها، ۱۰ گام محاسباتی روش نیوتن رافسون تقریبا مساوی ۱۲ گام محاسباتی حاصل از روش رانگ کوتای وفقی، ۹۰ گام محاسباتی روش گام مستقیم و ۱۵ گام محاسباتی روش تربیع دیفرانسیلی است و روش ارائه شده با دقتی بالاتر از روش تربیع دیفرانسیلی است. روش پیشنهادی ضمن کاهش حجم محاسبات، موجب افزایش دقت و راندمان حل نیز می‌شود. در برنامه رایانه‌ای تهیه شده توسط زبان برنامه نویسی فرترن ۹۵ میزان خطای مجاز روش نیوتن رافسون وفقی $\varepsilon = 1\times10^{-2}$ منظور شد. در روش نیوتن رافسون وفقی با کوچک تر کردن ε و افزایش تکرار ها دقت افزایش می‌یابد. در مثالی تغییرات نیمرخM2در کانال با کف متغیر بر اثر افزایش رسوب به صورت شیب دار با روش ارائه شده بررسی شد و دیده شد که با افزایش شیبدار ارتفاع رسوب، قسمتی از نیمرخ جریان به نیمرخM1 تبدیل شده و طول نیمرخ جریان هم افزایش پیدا کرده است. طبق جدول(۴)، بدلیل اینکه حداکثر خطای برشی می‌تواند تخمین مناسبی از خطا باشد در روش ارائه شده از این روش برای تخمین خطا استفاده می‌شود. روش ارائه شده مانند روش‌های عددی دیگر نیاز به تکرار دارد و برتری این روش این است که دارای دقت خیلی بالا با حجم محاسبات کم و با گام‌های انتگرال‌گیری هوشمند با دقت مورد نظر که این باعث کاهش زمان و هزینه محاسبات می‌شود. همچنین، این روش محاسباتی ساده، کاربردی و تخمین دقیقی از خطا را فراهم می‌آورند که این می‌تواند مورد توجه مهندسان هیدرولیک در پروژه‌ها شود و به دلیل دقت خیلی بالا، روش ارئه شده می تواند به عنوان مرجعی برای صحت سنجی سایر روش‌ها بکار گرفته شود.

منابع

1- Chyi H. S., De Roeck, G., Van Laethem M. and Geyskens P. 1989. Multi-level sub-structuring and an experimental self-adaptive newton-raphson method for two-dimensional nonlinear analysis. Computer and Structure,33(2):489-497.

2- Dey, S. 2000. Chebyshev solution as aid in computing GVF by standard step method. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 126: 271-274.

3- Dubin, J. R. 1999. On gradually varied flow profiles in rectangular open-channels. Journal of Hydraulic Research, 37: 99-105.

4- Fread, D. L. and T.E. Harbaugh, 1971. Open-channel profiles by Newton's iteration technique. Journal of Hydrology, 13: 70-80.

5- Faires, J. D. and R. L. Burden, 2012. Numerical methods. Dublin City University.

6- Kaya, B. 2011. Investigation of gradually varied flows using differential quadrature method. Scientific Research and Essays. 6(13): 2630-2638.

7- Kincaid, D. and W. Cheney, 1990. Numerical analysis. The University of Texas at Austin.

8- Kurnatowski, J. 2011. Comparison of analytical and numerical solutions for steady gradually varied open-channel flow. Polish Journal of Environmental Studies, 20(4): 925-930.

9- Lizhong, H. Q. Bo X. and G. Zhenzhen, 2011. The research on calculation of water surface profile in Channel by Runge – Kutta method. International symposium On Water Resource and Environmental Protection, Xian, China, May 20-22.

10- Ortega, J. M. and W.C. Reinbolt, 1970. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, San Diego.

11- Padovan, J. and T. Surapong, 1983. Operating characteristics of hyperbolicallyand elliptically constrained self-adaptive incremental Newton-Raphson algorithms. Journal of the Franklin Institute, 316(3): 197-223.

12- Rhodes, D. G. 1998. Gradually varied flow solution in Newton-Raphson form. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 124: 233-235.

13- Schaefer, R. L.1985. Bakwatr-computation of gradually varied flow. Advances in Engineering Software, 7(4): 170-172.

14- Sikorski, K. A. 2001. Optimal solutions of nonlinear equations. University Press, Oxford.

15- Zaghloul, N. A. and A.Y. Darwish, 1987. Solution of gradually varied flow problems using the direct step method with the IBM PC Lotus 1-2-3 system. Environmental Software, 2(4): 199-206.

16- Zaghloul, N. A. and M. N. Anwar, 1991. Numerical integration of gradually varied flow in trapezoidal channel. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 88: 259-272.

17- Zhang, J.M., Wang, Y.R., Xu, W.L. and H. Lio, 2005. New iteration method for calculating water level of gradually varied steady flow. Journal of Hydraulic Engineering, 36:501-50