

EXTENDED ABSTRACT

Groundwater Modeling of Astaneh-Kuchesfahan Aquifer

A. Mohammadi¹ and M. Ghaeini-Hessaroyeh^{2*}

1- M.Sc. Graduate of Water Engineering-Civil Engineering, Department of Civil Engineering and Geodesy, Graduate University of Advanced Technology, Kerman, Iran.

2* - Corresponding Author, Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran (mghaeini@uk.ac.ir).

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 16 May 2017

Revised: 30 January 2020

Accepted: 3 February 2020

TO CITE THIS ARTICLE :

Mohammadi, A., Ghaeini-Hessaroyeh, M. (2021). 'Groundwater Modeling of Astaneh-Kuchesfahan Aquifer', *Irrigation Sciences and Engineering*, 44(3), pp. 29-44. doi: 10.22055/jise.2020.22058.1582.

Keywords:

Analytical Element Method,
Point Collocation Method,
Astaneh-Kuchesfahan,
Groundwater Modeling.

Introduction

More efficient decisions in groundwater problems can be improved by increasing modeling accuracy. The mesh-free numerical model is a way to achieve this goal. In recent years, various mesh-free methods for modeling groundwater have been developed. This paper aims to develop groundwater models by mesh-free methods, including Analytical Element Method (AEM) and Point Collocation Method (PCM). The AEM is an idealistic perception of the linear superposition concept (Strack, 1987). The PCM uses a set of points scattered within the domain of the problem that transforms the governing partial differential equations into algebraic equation systems and does not need any predefined mesh (Liu & Gu, 2005).

Methods

Astaneh-Kuchesfahan plain is one of the agricultural centers in the province of Gilan located between Tehran and the southern basin of the Caspian Sea in the north part of Iran. The geographical location of the Astaneh-Kouchesfahan aquifer is shown in Fig. (1).

In this research, analytic element and point collocation mesh-free methods are used for groundwater modeling. The analytical element method is essentially a version of the superposition techniques. This method uses the exact analytical functions, and it doesn't need mesh-dependent interpolation functions (Fitts, 2012). Some points are distributed on the computational domain in the point collocation method, and the shape functions are created to solve the governing equation. This method is used to solve many partial differential equations with boundary conditions (Liu & Gu, 2005). The flow models are applied for groundwater modeling of the Astaneh-Kouchesfahan aquifer, and their results are compared. Particles Swarm Optimization (PSO) algorithm is used for the calibration of flow models. The models are developed by Python Object-Oriented Programming (OOP) language. The results of the AEM flow model based on the equipotential contour lines are shown in Fig. (2). Figure (3) also shows the nodal arrangement in the problem domain for the PCM model and geometry of the support domain.

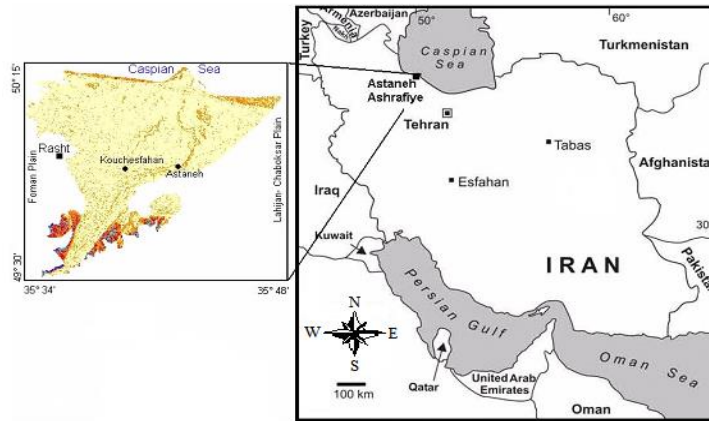


Fig. 1- Geographical location of Astenek-Kouchesfahan plain (Saatsaz et al. 2013)

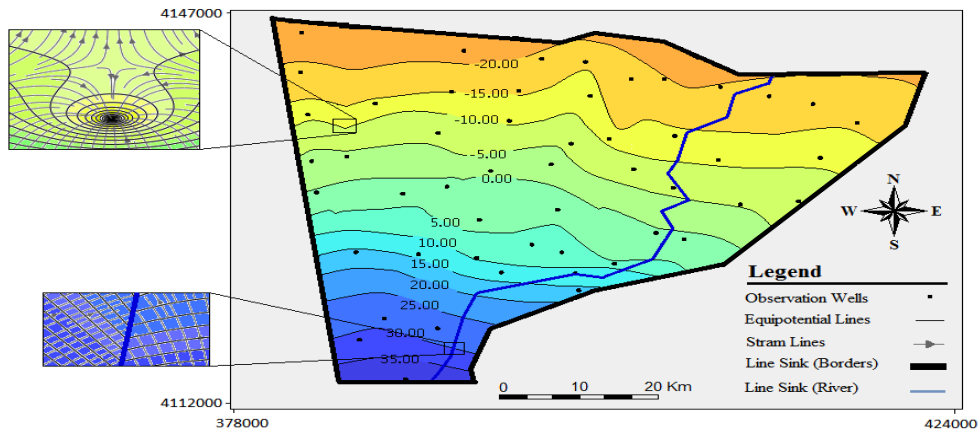


Fig. 2- The equipotential contour lines based on the AEM flow model results

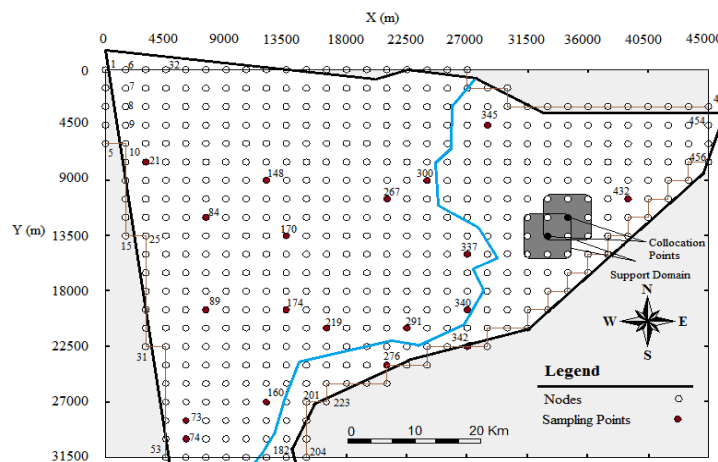


Fig. 3- Nodal arrangement for the case study

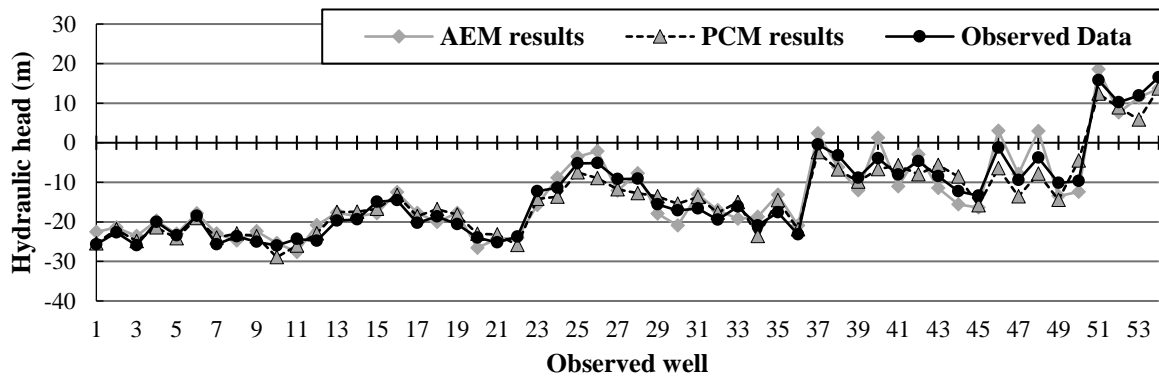


Fig. 4- Comparing the hydraulic head of the AEM and PCM model results and the observed data

Figure (4) shows the hydraulic head resulted from the developed AEM and PCM model comparing to the observed data for 54 observed wells. The analytical element model result's Mean Error (ME) and Root Mean Square Error (RMSE) are equal to 0.382 m and 2.805m, respectively. Table (1) shows the Calibration results for the difference value of C_s in the PCM model. The values of objective functions for PCM results are presented in Table (2).

Table 1- Calibration results for difference value of C_s

C_s	Hydraulic Conductivity (m/day)	Transmissivity (m^2/day)	Nash function	RMSE (m)	ME (m)
1500	9.128	450-1200	0.78	0.148	0.02
3000	13.124	300-940	0.85	3.629	0.493
4500	11.03	410-1100	0.91	0.907	0.123

Table 2- The values of objective functions for PCM results

C_s	Nash function	RMSE (m)	ME (m)
4500	0.94	0.897	0.145

After sensitivity analysis, the mean error and root mean square error of the results of the point collocation model are decreased to 0.145m and 0.897m. Comparing the two model results shows that the prediction of the point collocation method is better than that of the analytical element method.

Conclusion

In this study, two mesh-free methods contain AEM and PCM models are developed for groundwater modeling. Then the models are applied for Astane-kuchesfahan aquifer. The PSO algorithm is used for the calibration of the flow models. The model results are compared together and with the observed data for the hydraulic head of 54 observed wells. The analytical element model result's mean and root mean square error are equal to 0.382 m and 2.805m, respectively. Also, the mean error and root mean square error of the results of the point collocation model are equal to 0.145m and 0.897m, respectively. According to the results, the PCM model results are more accurate than the AEM flow model results.

Acknowledgment

The authors gratefully acknowledge Dr. Masoud Saatsaz for kindly supplying the data of Astaneh-Kuchesfahan plain.

References

- 1- Fitts, C.R., 2012. *Groundwater Science*. 2^{ed} Ed. Academic Press, Oxford.
- 2- Liu, G.R. and Gu, Y.T., 2005. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer, Dordrecht.
- 3- Saatsaz, M., Sulaiman, W.N.A., Eslamian, S. and Javadi, S., 2013. Development of a coupled flow and solute transport modelling for Astaneh–Kouchesfahan groundwater resources, North of Iran. *International Journal of Water*, 7(1), pp. 80-103.
- 4- Strack, O.D.L.; Fitts, C. and Ziadnoordijk, W., 1987. Application and demonstration of analytic element models. *NWWA Conference on Solving Ground Water Problems with Models*, Ohio, USA, pp.1464-1474.



© 2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



مدل سازی جریان آب زیرزمینی آبخوان آستانه-کوچصفهان

آرمان محمدی^۱ و مهناز قائینی حصاروئی^{۲*}

۱- دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران-مهندسی آب، دانشکده مهندسی عمران و نقشه برداری، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان.

*۲- نویسنده مسئول، دانشیار بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان mghaeini@uk.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۱۴

بازنگری: ۹۸/۱۱/۱۰

دریافت: ۹۶/۲/۲۶

چکیده

کارایی تصمیمات مدیریتی در مسائل آب زیرزمینی را می‌توان با افزایش دقت مدل‌سازی افزایش داد. یکی از راه‌های رسیدن به این مهم، استفاده از روش‌های مستقل از شبکه می‌باشد. در این تحقیق، دو روش بدون شبکه المان تحلیلی و هم‌آبی نقطه‌ای جهت مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی مورد استفاده قرار گرفتند. روش المان تحلیلی که برداشتی آزاد از مفهوم برهم نهی توابع خطی می‌باشد به کمک توابع تحلیلی دقیق و مستقل از وسعت دامنه منطقه به مدل‌سازی جریان می‌پردازد. در روش هم‌آبی نقطه‌ای به جای استفاده از شبکه‌بندی بر روی دامنه مدل، از یک سری نقاط پخش شده استفاده می‌شود؛ این روش عددی، در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزئی با شرایط مرزی استفاده می‌شود. جهت بررسی نحوه مدل‌سازی و مقایسه دقت هر روش، از داده‌های میدانی دشت آستانه-کوچصفهان استفاده شد. واسنجی مدل‌های توسعه یافته نیز توسط الگوریتم اجتماع ذرات انجام شد. توسعه مدل‌های آرایه شده توسط زبان برنامه‌نویسی شی‌گرا پایتون انجام گردید. نتایج مدل المان تحلیلی خطای میانگین $0/382$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $2/805$ متر را نشان می‌دهد. در روش هم‌آبی نقطه‌ای نیز بعد از تحلیل حساسیت، خطای میانگین $0/145$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $0/897$ متر به دست آمد. مقایسه نتایج دو روش مذکور نشان می‌دهد که روش هم‌آبی نقطه‌ای نتایج بهتری را نسبت به مدل المان تحلیلی پیش‌بینی کرده است.

کلیدواژه‌ها: روش المان تحلیلی، روش هم‌آبی نقطه‌ای، آستانه-کوچصفهان، مدل‌سازی آب زیرزمینی.

(Lazic, 2002). اما با وجود این تلاش‌ها هرگز نمی‌توان پارامترها را به صورت کامل از شبکه مجزا نمود.

روش المان تحلیلی یک روش عددی بدون شبکه بر پایه اصول نظریه پتانسیل می‌باشد. این روش با تبدیل معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی به شکل معادلاتی از قبیل لاپلاس (Laplace)، پواسن (Poisson)، هلمهولتز (Helmholtz) و بی‌هارمونیک (Biharmonic) در قالب دی پتانسیل و حل تحلیلی این معادلات به صورت توابع خطی و برهم نهی این توابع، به مدل‌سازی جریان می‌پردازد (Strack, 2009). این ویژگی‌ها باعث شده این روش بدون توجه به وسعت منطقه، جواب‌های دقیقی برای مناطق با مقیاس بزرگ تولید نماید (Strack et al., 1987, Bakker et al., 1999).

روش هم‌آبی نقطه‌ای نیز یک روش عددی بدون شبکه بوده که در حل بسیاری از مسائل به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی با شرایط مرزی کاربرد دارد (Kansa, 1990). این روش سیستم معادلات جبری را برای کل دامنه مسئله بدون استفاده از شبکه و به کمک

مقدمه

با توجه به کمبود منابع آب‌های سطحی، توجه به منابع آب زیرزمینی به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته است. نحوه حرکت و نوسانات آب در محیط متخلخل با توجه به خواص محیط پیرامون آن، یکی از پیچیده‌ترین فرایندهای مهندسی طبیعت می‌باشند. دست‌یابی به این مهم به کمک روش‌های ریاضی پیچیده امکان‌پذیر است که این فرایند را به کمک حل عددی توابع ریاضی شبیه‌سازی می‌نماید (Wang and Anderson, 1995). روش‌های شناخته‌شده مانند المان محدود و تفاضل محدود با استفاده از شبکه‌بندی بر روی دامنه منطقه مورد نظر اقدام به حل معادله‌های حاکم بر جریان آب زیرزمینی می‌نمایند. وجود شبکه و حل معادله‌های حاکم بر روی گره‌ها و استفاده از توابع درون‌یابی باعث عدم پیوستگی و گاهی کاهش دقت نتایج از یک سو و ارتباط مستقیم پیچیدگی محاسبات با وسعت دامنه مدل از سوی دیگر می‌گردد (Craig, 2004). جهت ایجاد پیوستگی و یکنواخت نمودن مقادیر سرعت‌های محاسبه‌شده در گره‌ها روش‌های درون‌یابی بسیاری توسعه یافته‌اند (Pokrajac and

آن‌ها در مقایسه با یکدیگر و همچنین داده‌های مشاهداتی منطقه مذکور مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، منطقه مورد مطالعه معرفی می‌شود. سپس روش‌های امان تحلیلی و هم‌آبی نقطه‌ای، نحوه مدل‌سازی و نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل‌های توسعه‌یافته ارائه می‌گردد.

مواد و روش‌ها

معرفی منطقه مورد مطالعه

آبخوان دشت آستانه-کوچصفهان یکی از منابع مهم تأمین آب استان گیلان می‌باشد. مطابق شکل (۱) مساحت این دشت ۱۳۴۳ کیلومترمربع و در طول جغرافیایی $30^{\circ} 49'$ تا $15^{\circ} 50'$ و عرض جغرافیایی $34^{\circ} 35'$ تا $48^{\circ} 35'$ واقع شده است. این منطقه جزو مناطق پر باران ایران محسوب می‌شود، به طوری که بارندگی متوسط سالیانه آن با توجه به آمار ۴۰ ساله حدود ۱۴۳۰ میلی‌متر است (Saatsaz et al., 2013). میزان برداشت از منابع آب زیرزمینی منطقه حدود $44/2$ میلیون مترمکعب در سال می‌باشد (Khorramdel et al., 2008). منطقه از نظر زمین‌شناسی در جنوب دریای خزر واقع شده و به عنوان یک بخش از محدوده تکتونیکی البرز شناخته می‌شود. مهم‌ترین رود این حوضه، سفیدرود با طولی برابر ۶۷۰ کیلومتر می‌باشد. آب‌دهی سالیانه این رود به طور متوسط $3998/4$ میلیون مترمکعب بوده است (Mirmoshtaghi et al., 2012).

مجموعه‌ای از نقاط پخش شده در داخل دامنه مسئله می‌سازد (Liu and Gu, 2005). به همین دلیل علاوه بر حفظ زمان مورد نیاز برای تولید شبکه، می‌تواند هزینه قابل توجه و زمان زیادی را در مدل‌سازی‌ها و شبیه‌سازی‌ها صرفه‌جویی نماید. در زمینه مطالعات آب زیرزمینی به کمک روش هم‌آبی نقطه‌ای مطالعات مختلفی انجام شده است (Meenal and Eldho, 2011) که این مطالعات به صورت مشترک به آسان بودن نحوه مدل‌سازی به کمک این روش و در عین حال دقت نتایج حاصل از این روش اشاره نموده‌اند. Rastogi و Pathania (2017) روش هم‌آبی نقطه‌ای با روش حل گالرکین در حالت ناپایدار را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد که این روش نسبت به روش امان محدود تنها $0/4$ درصد خطا داشته و محدودیت‌های ناشی از مش‌بندی را نیز دارا نیست که در نتیجه می‌توان از روش هم‌آبی نقطه‌ای به عنوان یک روش موثر در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی استفاده نمود. Ranjram و Craig (2018) با انجام تغییراتی باعث افزایش کارایی روش امان تحلیلی شدند به این ترتیب که آن‌ها با استفاده از نقاط تمرکز خاصی، باعث بهبود توابع بیانگر ویژگی‌های هیدرولوژیکی شده و مرزهای آن‌ها را بهبود بخشیدند.

با توجه به برتری‌های ذکر شده دو روش بدون شبکه امان تحلیلی و هم‌آبی نقطه‌ای، در تحقیق حاضر این دو روش جهت مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی آبخوان آستانه-کوچصفهان مورد استفاده قرار گرفته و دقت نتایج

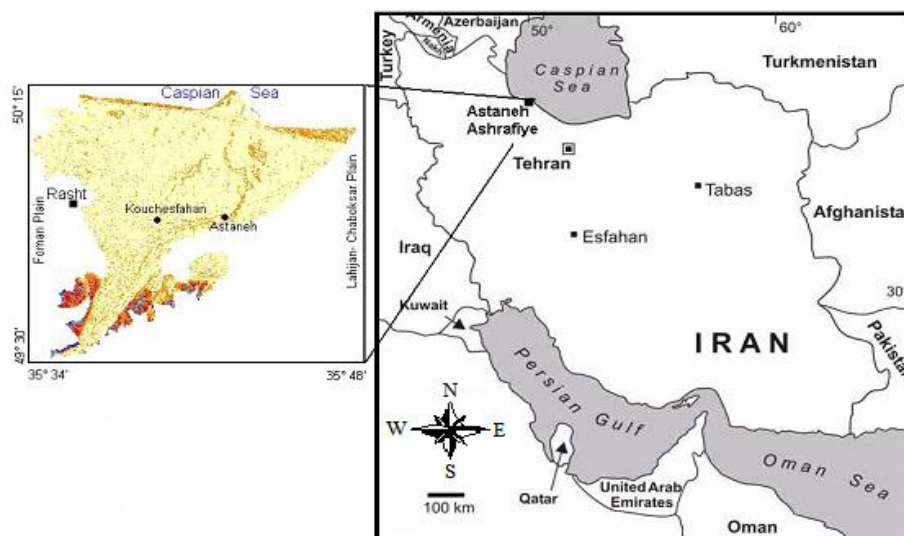


Fig. 1- Geographical location of Astaneh-Kucheshfahan plain (Saatsaz et al., 2013)

شکل ۱- موقعیت جغرافیایی دشت آستانه-کوچصفهان (Saatsaz et al., 2013)

مدل مفهومی منطقه

موثر است (Rabideau et al., 2007). المان‌ها هر کدام بیان‌کننده یک ویژگی هیدرولوژیکی یا ژئولوژیکی منطقه می‌باشند. این توابع (المان‌ها) با هم جمع شده و تشکیل یک معادله کلی را می‌دهند. به کمک این معادله که ممکن است شامل صدها عبارت باشد می‌توان بار آبی در هر نقطه را محاسبه نمود (Fitts, 2012). در روش المان تحلیلی جهت ایجاد توانایی روش، در مدل‌سازی شرایط مختلف آبخوان، معادلات جریان در قالب دبی پتانسیل (Φ) معرفی می‌شوند (Strack, 2009):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = T \frac{\partial h}{\partial i} \quad (i = x, y, z) \quad (2)$$

به این ترتیب رابطه (۱) در قالب دبی پتانسیل عبارت است از:

$$\nabla^2 \Phi = \pm N \quad (3)$$

با توجه به آزاد بودن سیستم آبخوان در این تحقیق، برای به دست آوردن میزان بار آبی از روی دبی پتانسیل می‌توان با در نظر گرفتن $T=Kh$ مطابق زیر عمل نمود:

$$\Phi_{(x,y)} = \frac{1}{2} Kh_{(x,y)}^2 + C_u \quad (4)$$

که K هدایت هیدرولیکی منطقه و C_u ثابت بوده و در بیشتر مواقع جهت سهولت صفر در نظر گرفته می‌شود (Fitts, 2012). در روش المان تحلیلی معمولاً توابع به صورت مختلط و به شکل رابطه (۵) معرفی می‌شوند (Fitts, 2012).

$$\Omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z) \quad (5)$$

که $\Omega(z)$ پتانسیل مختلط، $z=x+iy$ مختصات مختلط، $\Phi(z)$ دبی پتانسیل، $i = \sqrt{-1}$ و $\Psi(z)$ تابع جریان می‌باشد. در این تحقیق، جهت مدل‌سازی، به المان‌های جریان یکنواخت، فروخط (Line Sink)، فرمنطقه (Area Sink) و فرونقطه (Point Sink) نیاز است. المان جریان یکنواخت یک جواب ساده از حل معادله لاپلاس می‌باشد. این المان به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\Omega_{uf}(z) = -Q_o(z - z_{ref})e^{i\beta} \quad (6)$$

طبق مطالعه‌های، دشت آستانه-کوچصفهان دارای سفره آزاد بوده و بر روی لایه رس نفوذناپذیر دوره ژوراسیک قرار گرفته است. بیشترین ضخامت سفره ۲۵۰ متر در مرکز دشت و کمترین ضخامت آن ۴۰ متر و در شمال دشت می‌باشد (Saatsaz, 2012). دامنه مدل از طرف شرق و غرب توسط صخره‌های مرکب تریزیک-ژوراسیک و مصالح رسوبی سنوزویک محدود شده است، از طرفی با بررسی خطوط تراز آب زیرزمینی جهت جریان از سوی جنوب به سمت شمال مشخص می‌شود (Saatsaz et al., 2013). در نتیجه مدل از طرف شرق و غرب به عنوان دو مرز بدون جریان به مدل وارد می‌شود. مرز جنوبی توسط مخروط افکنه‌های سفیدرود با خط هم‌پتانسیل ۴۰ متر محدود شده است، مرز شمالی نیز دارای طول حدود ۵۰ کیلومتر بوده و در امتداد ساحل قرار دارد در نتیجه این دو مرز به صورت مرزهای با بار آبی مشخص به مدل وارد می‌شود. این مرزها محدوده‌ای به مساحت ۹۴۲ کیلومترمربع و محیط ۱۳۶ کیلومتر را تشکیل می‌دهند. سطح آب زیرزمینی به‌طور متوسط از ۴۰ متر بالاتر از سطح دریا‌های آزاد تا ۲۵ متر پایین تر از سطح دریا‌های آزاد تغییر می‌کند. میزان تغذیه و تخلیه سفره نیز با توجه به مطالعات انجام گرفته در دسترس می‌باشد (Khorramdel et al., 2008). قابلیت انتقال از ۵۰۰ مترمربع در روز در قسمت شمالی تا ۴۰۰۰ مترمربع در روز برای قسمت‌های مرکزی تغییر می‌کند، در فاصله بین شهرهای رشت و آستانه این مقدار حدود ۲۰۰۰ مترمربع در روز محاسبه شده است (Saatsaz et al., 2013). در تحقیق حاضر هدایت هیدرولیکی کل منطقه ثابت و برای سعی اولیه، برابر ۱۵ متر در روز فرض شده است. این مقدار ثابت، میانگین وزنی مقدار هدایت هیدرولیکی هر ناحیه در منطقه مورد مطالعه با توجه به مدل‌سازی Saatsaz et al (2013) می‌باشد.

مدل جریان آب زیرزمینی

در این تحقیق از فرضیات دوپویی-فورشه‌ایمر به عنوان یک فرض واقع‌بینانه در مدل‌سازی استفاده شده است. از طرفی در این تحقیق، مدل‌سازی در حالت پایدار به شکل رابطه (۱) انجام گردیده است.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \pm N \quad (1)$$

که T قابلیت انتقال، h بار آبی و N میزان تغذیه (+) و یا تخلیه (-) سفره و x و y نشان‌دهنده جهت محورهای مختصات کارترین می‌باشد.

روش المان تحلیلی

در این روش هر المان، یک تابع ریاضی بوده که همراه یک شرط مرزی خاص، داخل دامنه جریان وجود داشته و به سهم خود بر تغییرات آن

که a_n و b_n ضرایب محاسبه شده توسط شرایط مرزی، Q نشان دهنده تغذیه یا تخلیه از منطقه دایره‌ای و R_c نیز شعاع دایره است.

$$Z = \frac{z - z_c}{R_c} \quad \text{که } z_c \text{ مختصات نقطه مرکزی دایره می باشد}$$

المان فرونقطه برای نشان دادن چاه‌های تغذیه یا تخلیه استفاده می شود و به شکل رابطه (۱۰) معرفی می گردد.

$$\Omega_{wl}(z) = \frac{Q_w}{2\pi} \ln(z - z_w) \quad (10)$$

که $\Omega_{wl}(z)$ پتانسیل مختلط المان فرونقطه، Q_w نرخ برداشت از چاه، z_w مختصات مختلط چاه و $z = x + iy$ مختصات مکانی مختلط فرونقطه مورد نظر می باشد.

در مدل المان تحلیلی ابتدا داده‌های اولیه مربوط به مشخصات آبخوان، ضرایب هدایت هیدرولیکی، تخلخل و ... به مدل داده می شوند، سپس مدل با توجه به دستورهای فراخوانی که برای هر المان تعریف شده، داده‌های مورد نیاز خود را به المان اعمال می کند، این المان‌ها در روابط (۶) الی (۱۰) معرفی شده‌اند. از آنجایی که المان‌ها به صورت مختلط می باشند بخش موهومی در یک ماتریس خالی جمع آوری شده و قسمت حقیقی که به عنوان تابع جریان شناخته می شود، دست نخورده باقی می ماند. در مرحله بعد با مشخص کردن یک شرط از مدل خواسته می شود، در صورتی که ضرایب دبی پتانسیل مشخص است آن‌ها را در یک ماتریس خالی جمع آوری نماید و در صورتی که این ضرایب نامعلوم هستند، به کمک شرایط مرزی مشخص از قبیل مرزهای بار آبی مشخص یا مرزهای بدون جریان و تشکیل دستگاه، آن‌ها را حل نماید. جهت حل دستگاه ضرایب نامشخص از تابع حل معادله‌های linalg.solve کتابخانه NumPy در زبان پایتون استفاده شد. پایتون یک زبان مفسر و مناسب برای توسعه مدل می باشد. بعد از به دست آمدن ضرایب نامشخص که به کمک بر هم نهدی معادله‌های تشکیل می شود، رابطه دبی پتانسیل مشخص شده و با قرار دادن آن در رابطه (۴) می توان تنها مجهول رابطه که میزان بار آبی است را به دست آورد. مرزهای بدون جریان، مرزهای بار آبی مشخص و رودخانه منطقه به عنوان المان‌های فروخط به مدل اعمال می شوند. برای وارد کردن میزان تغذیه از طریق بارندگی به آبخوان، از المان فرومنطقه استفاده می شود. برای مدل سازی میزان برداشت از چاه‌ها در مناطق مختلف نیز از المان فرونقطه استفاده می شود. لازم به ذکر است این روش یک روش برداری بوده و با مشخص بودن مختصات نقاط می توان میزان دقیق بار آبی در آن نقطه را مشخص نمود.

روش هم آبی نقطه‌ای

این روش برای حل تقریبی معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات معمولی یا جزئی با شرایط مرزی استفاده می شود. در این روش حل دقیق معادله

که $\Omega_{ylf}(z)$ پتانسیل مختلط ناشی از جریان، Q_o میزان دبی جریان، z مختصات مختلط، β زاویه جریان با محور x ها و z_{ref} مختصات مختلط نقطه مرجع می باشد (Craig, 2004).

المان فروخط برای مدل سازی رودها، کانال‌ها، زهکش‌ها، چاه‌های افقی و حتی مرزهای آبخوان مورد استفاده قرار می گیرد (Bakker and Kelson, 2009). اصطلاحاً فروخط‌های با نرخ دبی متغیر، به فروخط‌های با مرتبه بالا مطابق رابطه (۷) معروف هستند (Janković and Barnes, 1999).

$$\Omega_{ls}(Z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^N a_n \sum_{m=0}^n f(n, m; Z) T_m(Z) \right) - \frac{\delta}{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n T_n(1) \ln(Z-1) + \frac{\delta}{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n T_n(-1) \ln(Z+1) \quad (7)$$

که a_n ضرایب محاسبه شده یا مشخص شده توسط شرایط مرزی المان، T_n و T_m چندجمله‌ای‌های چیبیشف (Chebyshev)، N مرتبه سری‌های چیبیشف، δ برای فروخط یک و در غیر این صورت صفر می باشد. Z نیز موقعیت المان در سیستم مختصات محلی بوده و برابر است با $\frac{2z - (z_1 + z_2)}{(z_2 - z_1)}$ که z_1 و z_2 مختصات نقاط راس المان می باشند. تابع $f(n, m; Z)$ در رابطه (۷) نیز به شکل رابطه (۸) بیان می شود (Janković and Barnes, 1999):

$$f(n, m; Z) = \begin{cases} \frac{Z-1}{Z+1} & m = n \\ \frac{4}{n-m} & 0 < m < n \quad m+n = \text{ج} \\ \frac{2}{n} & m = 0 \quad n = \text{ج} \end{cases} \quad (8)$$

المان فرومنطقه برای مناطقی که دارای تغذیه و یا تخلیه از آبخوان می باشد مورد استفاده قرار می گیرد و به شکل رابطه (۹) بیان می شود (Rabideau et al., 2007):

$$\Omega_{as}(Z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n & , |Z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^{-n} + \frac{Q}{2\pi} \ln(R_c Z) & , |Z| \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} = \frac{(x - x_i)}{R_i(x, y)} \quad (14)$$

$$\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial y} = \frac{(y - y_i)}{R_i(x, y)} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial x^2} = \frac{((y - y_i)^2 + C_s^2)}{R_i^3(x, y)} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial y^2} = \frac{((x - x_i)^2 + C_s^2)}{R_i^3(x, y)} \quad (17)$$

با جای گذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۳) رابطه زیر به دست می آید:

$$K \left(\left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} \right) h_i \left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} \right) h_i + (R_i(x, y) h_i) \left(\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial x^2} \right) h_i \right) + K \left(\left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial y} \right) h_i \left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial y} \right) h_i + (R_i(x, y) h_i) \left(\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial y^2} \right) h_i \right) \quad (18)$$

به این ترتیب می توان بعد از محاسبه تابع شکل هر دامنه حمایتی و ترکیب تمام دامنه های حمایتی برای کل مسئله، مقدار بار آبی را محاسبه نمود. در مدل هم آبی نقطه ای بعد از اختصاص داده های اولیه به مدل از جمله ضرایب انتقال و ابعاد دامنه حمایتی به محاسبه تابع شکل مطابق رابطه (۱۲) و مشتقات آن مطابق روابط (۱۴) الی (۱۷) پرداخته می شود. در نهایت این توابع بر حسب بار آبی نامشخص در رابطه (۱۸) قرار داده شده و بعد از ادغام این معادله ها، یک دستگاه معادلات تشکیل می شود. در نهایت به کمک شرایط مرزی مشخص و حل این دستگاه، مقادیر بار آبی که مجهولات می باشند، به دست می آید.

بعد از پیاده سازی مدل ها اقدام به واسنجی آن ها شد. با توجه به رژیم دایمی جریان، نتیجه واسنجی مقدار هدایت هیدرولیکی بود. البته با در نظر گرفتن تأثیر رودخانه، میزان هدایت بستر رود که تابعی از طول، عرض و هدایت هیدرولیکی کف رودخانه است، نیز از واسنجی به دست می آید. با توجه به تغییرات ناچیز میزان ذخیره آبخوان در فروردین ۱۳۸۹، جهت واسنجی مدل، آمار این ماه انتخاب گردید. در حقیقت میزان تغذیه و تخلیه در این ماه برابر است. در تحقیق انجام گرفته جهت واسنجی از الگوریتم اجتماع ذرات استفاده شد. روند کار الگوریتم به این صورت است که در هر مرحله از حرکت جمعیت (داده های ورودی به الگوریتم)، هر ذره با توجه به دو مقدار بهترین به روز می شود. اولین مقدار، بهترین جواب از لحاظ

دیفرانسیل با یک چندجمله ای که براساس انتخاب توابع آزمون بنا شده است، تقریب زده می شود. برای دست یابی به جواب تقریبی یک مسئله، اولین کار تقریب تابع میدانی با استفاده از توابع شکل است. برای ساخت تابع شکل فقط یک مجموعه از نقاط میدانی در یک دامنه محلی کوچک استفاده می شوند. در نتیجه تابع شکل تولید شده فقط برای همان دامنه کوچک که دامنه حمایتی نام دارد، کاربرد داشته و خارج از آن صفر می باشد (Liu and Gu, 2005). برای تولید توابع شکل روش های مختلفی وجود دارد که در حالت کلی به سه گروه اصلی روش درون یابی نقطه ای شعاعی (Radial Point Interpolation Method) میانگین حداقل مربعات و روش درون یابی نقطه ای چندجمله ای تقسیم بندی می شوند. هر کدام از این روش ها از توابع پایه خاصی استفاده می کنند. با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن یک روند مشخص در هر گروه، در نهایت توابع شکل تولید می گردند. برای غلبه بر مشکل تکینگی (Singularity) ماتریس جواب در روش درون یابی نقطه ای چندجمله ای، توابع پایه ای شعاعی پیشنهاد شده اند (Liu and Gu, 2005). در این حالت تابع تقریبی برای مسئله مورد نظر در تحقیق حاضر برابر است با (Liu and Gu, 2005):

$$\tilde{h}(x, y) = \sum_{i=1}^n R_i(x, y) \cdot h_i \quad (11)$$

که $R_i(x, y)$ توابع پایه شعاعی بوده و در حالت دو بعدی مطابق رابطه (۱۲) بیان می شود.

$$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^s \Rightarrow R_i(x, y) = \sqrt{r_i^2 + C_s^2} \quad (12)$$

که در آن d_c فاصله بین گرماها در دامنه حمایتی می باشد که در این تحقیق $\alpha_c = 1, 2, 3$ و $s = 0.5$ در نظر گرفته شده است و در حقیقت $C_s = \alpha_c d_c$ می باشد. این ضریب به هندسه و میزان وسعت دامنه حمایتی وابسته است. هر چه مقدار ضریب مذکور بزرگ تر باشد، دامنه حمایتی بزرگ تر بوده و در نتیجه نقاط بیشتری تحت پوشش قرار خواهد گرفت. با مشتق گیری از معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی و ثابت فرض کردن هدایت هیدرولیکی رابطه زیر به دست می آید:

$$K \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + K \left(\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (13)$$

با توجه به رابطه (۱۳)، مشتقات رابطه (۱۲) به صورت روابط زیر نوشته می شود:

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^N (h_o - h_c)}{N} \quad (20)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (h_o - h_c)^2}{N}} \quad (21)$$

که h_o و h_c به ترتیب مقادیر بار آبی مشاهداتی و محاسباتی می باشند. N تعداد کل مشاهدات و \bar{h}_o میانگین وزنی بارهای آبی مشاهداتی می باشد. فلوجارت مدل اجتماع ذرات جهت واسنجی مدل در شکل (۲) نشان داده شده است.

شایستگی است که تاکنون برای هر ذره به طور جداگانه به دست آمده است. این مقدار بهترین تجربه شخصی است که به نام $pbest$ نامیده می شود. مقدار بهترین دیگر که توسط الگوریتم به دست می آید، بهترین مقداری است که تاکنون توسط تمام ذره ها در میان جمعیت به دست آمده است. این مقدار بهترین تجربه عمومی است که به نام $gbest$ نامیده می شود. پس از یافتن این دو مقدار هر ذره سرعت و مکان جدید خود را به روز می کند تا زمانی این حلقه ادامه می یابد تا تابع هدف که به ترتیب در سه مدل مختلف که عبارت است از تابع نش مطابق رابطه (۱۹)، خطای میانگین مطابق رابطه (۲۰) و خطای ریشه میانگین مربعات مطابق رابطه (۲۱) است، ارضا شود.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (h_o - h_c)^2}{\sum_{i=1}^N (h_o - \bar{h}_o)^2} \quad (19)$$

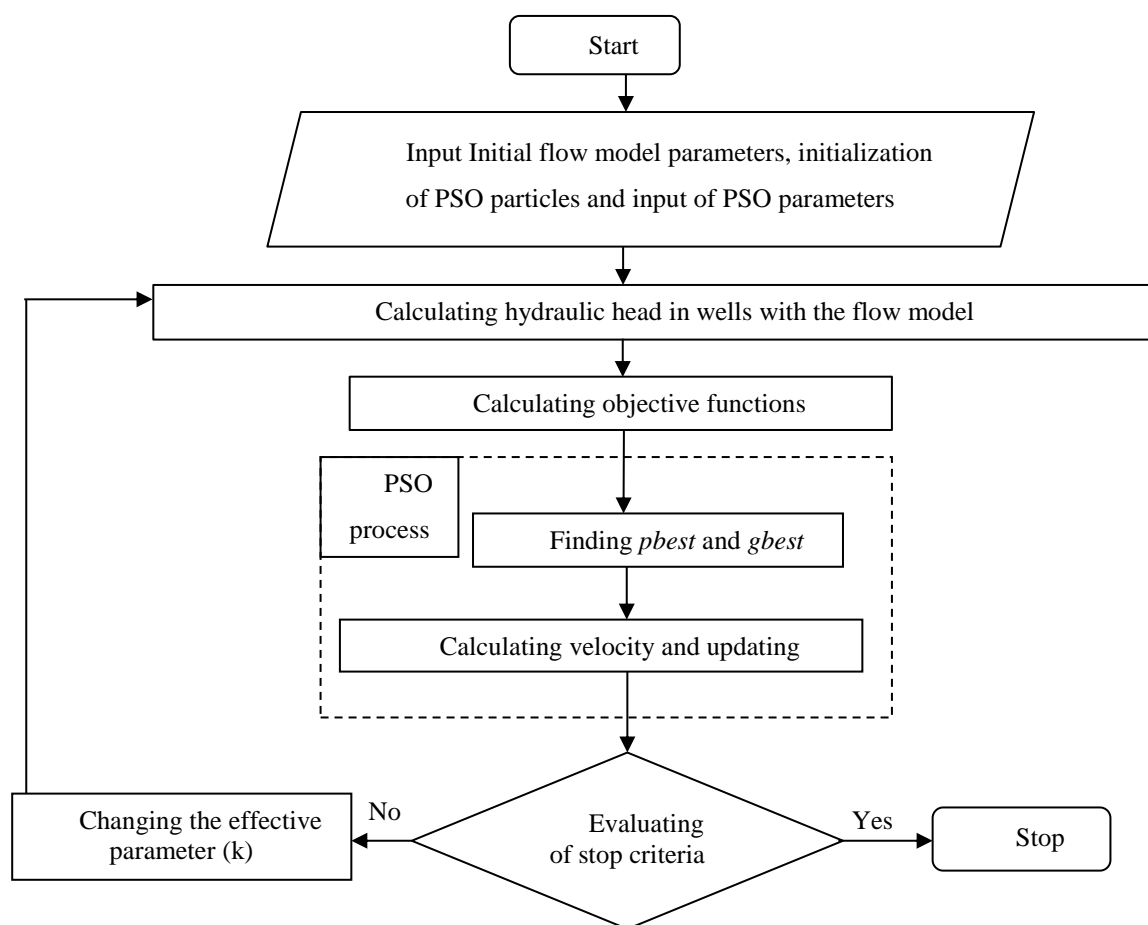


Fig. 2-. Implementation of the PSO calibration model flowchart

شکل ۲- فلوجارت مدل اجتماع ذرات جهت واسنجی مدل

مفهومی منطقه، شرایط مرزی مدل نیز مشخص گردید. با توجه به حساسیت مدل‌های هم‌آبی نقطه ای به ضریب C_s (Meenal and Eldho, 2011)، جهت تحلیل حساسیت، مدل‌سازی برای ۵۴ حلقه چاه مشاهداتی برای فروردین ۱۳۸۹ با سه مقدار مختلف $C_s=1500$ و $C_s=3000$ و $C_s=4500$ انجام شد. این ضریب به هندسه و میزان وسعت دامنه حمایتی وابسته است. هر چه مقدار ضریب مذکور بزرگ‌تر باشد، دامنه حمایتی بزرگ‌تر بوده و در نتیجه نقاط بیشتری تحت پوشش قرار خواهد گرفت. قابلیت انتقال و هدایت هیدرولیکی بر اساس نتایج مدل‌سازی، مطابق جدول (۱) به‌دست آمد.

با توجه به نتایج ارائه‌شده در جدول (۱)، مدل‌سازی با $C_s=4500$ ، با توجه به مقدار تابع نش $0/91$ و خطای میانگین $0/123$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $0/907$ متر انتخاب گردید. بر این اساس بهترین هدایت هیدرولیکی کل منطقه $11/03$ متر در روز و قابلیت انتقال بین 410 تا 1100 متر مربع در روز به عنوان نتایج واسنجی مدل انتخاب شد. بعد از مشخص شدن مقدار هدایت هیدرولیکی با توجه به مدل توسعه‌یافته، مدل‌سازی مجدد برای داده‌های تیرماه ۱۳۸۹ که مقدار بارندگی ناچیز بوده است، برای $C_s=4500$ انجام شد. نتایج مدل‌سازی انجام‌شده در مقایسه با داده‌های مشاهداتی در شکل (۶) ارائه شده است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از این مدل‌سازی که در جدول (۲) مشاهده می‌شود، مقدار تابع نش $0/94$ و خطای میانگین $0/145$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $0/897$ متر به‌دست‌آمد.

نتایج و بحث

نتایج مدل المان تحلیلی

برای واسنجی از آمار ۵۴ حلقه چاه مشاهداتی برای فروردین ۱۳۸۹ استفاده شد. بعد از واسنجی، با توجه به یکسان فرض نمودن هدایت هیدرولیکی، بهترین مقدار برای کل منطقه $12/75$ متر در روز و میزان قابلیت انتقال بستر رودخانه با تقسیم کل رودخانه به ۱۶ المان فروخت، بین 370 تا 1000 مترمربع در روز به‌دست آمد. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌سازی، مقدار تابع نش $0/87$ و خطای میانگین $0/2$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $1/51$ متر می‌باشد.

بعد از واسنجی با استفاده از پارامترهای به‌دست آمده و با توجه به ناچیز بودن میزان بارندگی نسبت به برداشت در تیرماه ۱۳۸۹، مدل‌سازی برای داده‌های این ماه انجام گردید. نتایج مدل المان تحلیلی، میزان تابع نش $0/89$ و خطای میانگین $0/382$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $2/805$ متر را نشان می‌دهد. در شکل (۳) مقایسه نتایج مدل حاضر و داده‌های مشاهداتی برای هر چاه مشاهداتی مشخص شده است. شکل (۴) نتایج خروجی مدل بر حسب خطوط هم پتانسیل و جزئیات تاثیر رودخانه و چاه‌های برداشت را نشان می‌دهد.

نتایج مدل هم‌آبی نقطه‌ای

برای مدل‌سازی دشت آستانه-کوچصفهان مطابق شکل (۵)، کل دامنه مدل به ۴۵۶ نقطه با فاصله یکسان تقسیم شد به طوری که می‌توان گفت ($\Delta x = \Delta y = 1500m$). با توجه به توضیحات بخش مدل

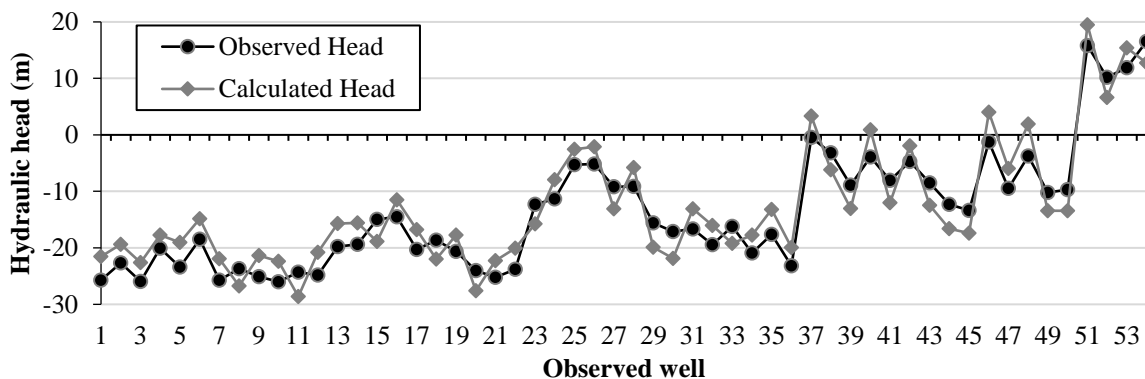


Fig. 3- Comparing the hydraulic head of the AEM results and observed data

شکل ۳- مقایسه بار آبی محاسباتی و مشاهداتی تیرماه ۱۳۸۹ مدل المان تحلیلی

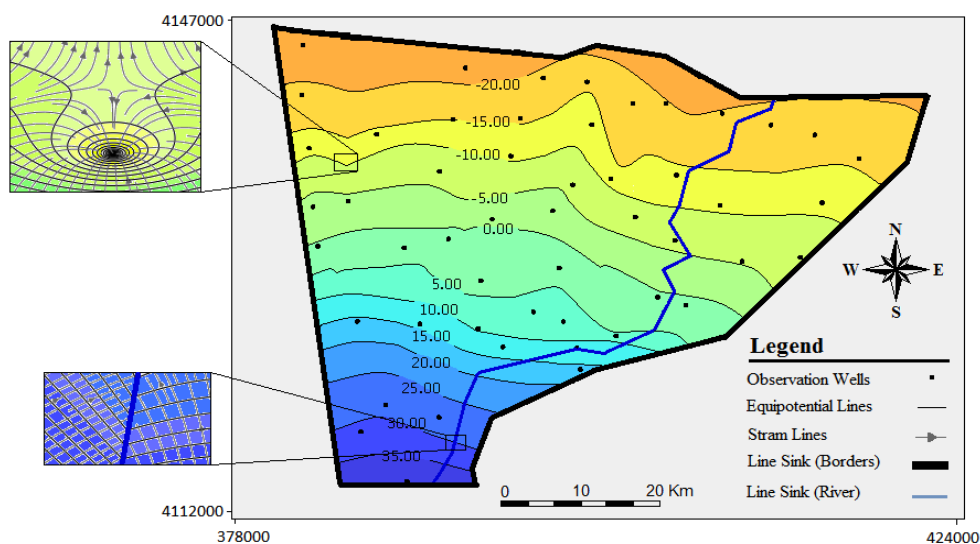


Fig. 4- The equipotential contour lines based on the AEM flow model results

شکل ۴- خطوط هم پتانسیل به دست آمده از نتایج مدل امان تحلیلی

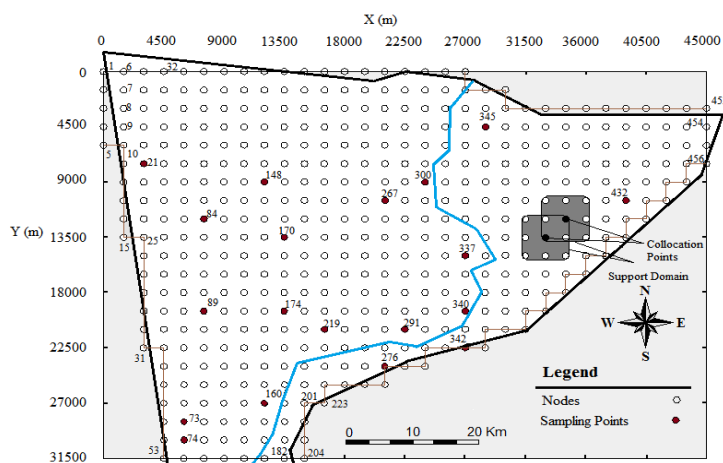


Fig. 5- Nodal arrangement for the case study

شکل ۵- چیدمان نقاط در دامنه منطقه مورد مطالعه

جدول ۱ نتایج به دست آمده از واسنجی مدل بر اساس C_s های مختلف

Table 1- Calibration results for the difference value of C_s

C_s	Hydraulic Conductivity (m/day)	Transmissivity (m ² /day)	Nash function	RMSE (m)	ME (m)
1500	9.128	450-1200	0.78	0.148	0.02
3000	13.124	300-940	0.85	3.629	0.493
4500	11.03	410-1100	0.91	0.907	0.123

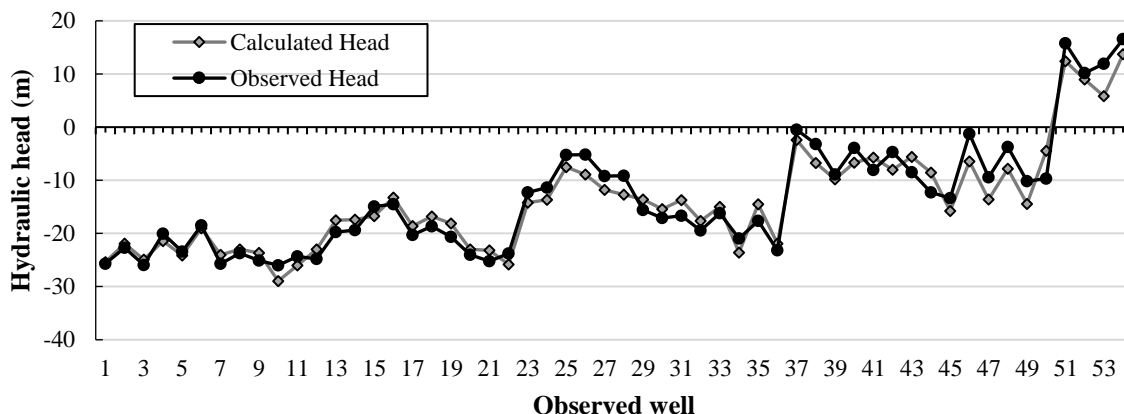


Fig. 6- Comparing the hydraulic head of the PCM results for $C_s=4500$ and observed data
 شکل ۶- مقایسه بار آبی مشاهداتی و محاسباتی مدل هم آبی نقطه‌ای با $C_s=4500$ برای تیرماه ۱۳۸۹

جدول ۲- مقادیر تابع هدف به دست آمده از مدل هم آبی نقطه‌ای برای تیرماه ۸۹

Table 2- The values of objective functions for PCM results

C_s	Nash function	RMSE (m)	ME (m)
4500	0.94	0.897	0.145

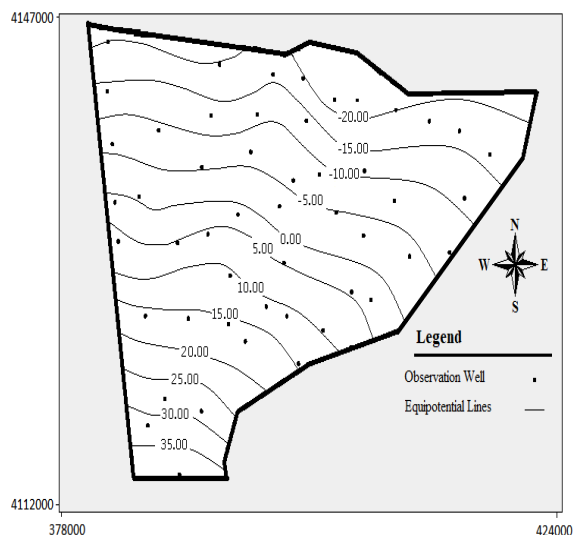


Fig. 7- The equipotential contour lines based on the PCM flow model results

شکل ۷- خطوط تراز آب زیرزمینی مدل هم آبی نقطه‌ای

تغذیه از المان‌های فرامنطقه دایره‌ای استفاده شده است، به همین علت بعضی مناطق به صورت کامل تحت پوشش این المان‌ها نیستند، در نتیجه میزان بارندگی به صورت تقریبی در مدل وارد شد. در تیرماه میزان بارندگی به حداقل مقدار خود می‌رسد و این موضوع دقت مدل‌سازی را افزایش داده است.

شکل (۷) خروجی نتایج خطوط هم پتانسیل آب زیرزمینی براساس $C_s=4500$ را نشان می‌دهد.

تحلیل نتایج

در مدل المان تحلیلی مقدار تابع نش برای نتایج با آمار تیرماه نسبت به آمار فرودین ماه بهتر می‌باشد، یکی از دلایل این امر را می‌توان در میزان بارندگی این دو ماه دانست. در مدل المان تحلیلی حاضر برای اعمال تأثیر

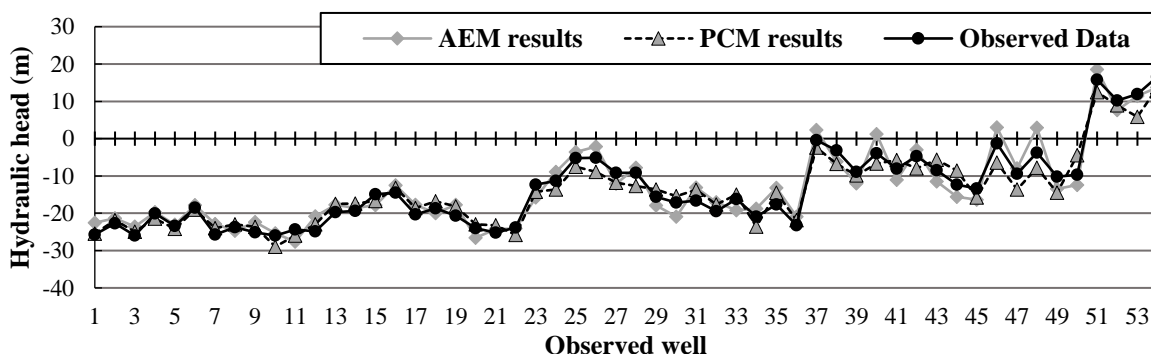


Fig. 8- Comparing the hydraulic head of the AEM and PCM model results and the observed data

شکل ۸- مقایسه نتایج دو روش مدل سازی المان تحلیلی و هم آبی نقطه‌ای با مقادیر مشاهده‌ای برای تیرماه ۱۳۸۹

متر در روز و قابلیت انتقال بستر رودخانه با تقسیم کل رودخانه به ۱۶ المان فروخته، بین ۳۷۰ تا ۱۰۰۰ مترمربع در روز محاسبه گردید. با استفاده از مقادیر محاسبه شده اقدام به مدل سازی جریان با توجه به آمار تیرماه ۱۳۸۹ گردید. نتایج نشان دهنده میزان تابع نش $0/89$ و خطای میانگین $0/382$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $2/805$ متر می باشد. با توجه به حساسیت مدل هم آبی نقطه‌ای به ضریب C_s مدل سازی برای سه مقدار مختلف 1500 ، 3000 و 4500 انجام شد. بهترین نتایج در $C_s=4500$ به دست آمد به این ترتیب که بعد از واسنجی مدل مقدار هدایت هیدرولیکی $11/03$ متر در روز و قابلیت انتقال 410 تا 1100 مترمربع در روز محاسبه گردید. با استفاده از این مقادیر به دست آمده مدل سازی جریان برای تیرماه ۱۳۸۹ انجام شد و میزان تابع نش $0/94$ ، میزان خطای میانگین $0/145$ متر و ریشه میانگین مربعات خطا $0/897$ متر محاسبه گردید. در نهایت نتایج دو روش بدون شبکه المان تحلیلی و هم آبی نقطه‌ای نشان می دهد مدل هم آبی نقطه‌ای با وجود فرضیات در نظر گرفته شده، نتایج را با دقت بهتری محاسبه می نماید. دلیل این امر نیز در نظر گرفتن حساسیت مدل به پارامتر C_s می باشد که با دقت در انتخاب مقدار درست این پارامتر می توان دقت مدل سازی را بسیار افزایش داد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مراتب تشکر را از آقای دکتر ساعت ساز به منظور در اختیار قرار دادن داده‌های دشت آستانه-کوجصفهان کمال تشکر را دارند.

با توجه به مطالعات انجام گرفته (Meenal and Eldho, 2011, 2012) در مدل هم آبی نقطه‌ای مشخص شد نتایج به مقدار C_s حساس است. به همین دلیل مدل سازی برای سه مقدار مختلف 1500 و 3000 و 4500 انجام گردید. این ضریب به هندسه و اندازه دامنه حمایتی مربوط می شود و برابر است با $C_s = \alpha_c \cdot d_c$ که d_c اندازه دامنه حمایتی و α_c معرف پارامتر شکل می باشد. نتایج محققین نشان می دهد در α_c بین ۲ تا ۳، پاسخها دارای دقت بهتری هستند، علاوه بر این دامنه نوسانات پاسخ های مدل نسبت به مشاهدات در این محدوده کمتر می باشد. به این ترتیب در مطالعه حاضر با فرض $\Delta x = \Delta y = 1500m$ بهترین مقدار مطابق نتایج به دست آمده در محدوده $C_s=3000$ و $C_s=4500$ حاصل شد. در نهایت در شکل (۸) مقایسه نتایج دو روش مدل سازی نسبت به مقادیر مشاهده‌ای ارائه شده است. نتایج نشان می دهد که نتایج مدل هم آبی نقطه‌ای با انتخاب مناسب مقدار C_s ، دقت بهتری نسبت به نتایج روش المان تحلیلی دارد.

نتیجه گیری

در این تحقیق دو روش مستقل از شبکه المان تحلیلی و هم آبی نقطه‌ای جهت مدل سازی جریان آب زیرزمینی در حالت پایدار استفاده شد. مدل های توسعه یافته به کمک داده‌های میدانی آبخوان آستانه-کوجصفهان مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفتند، جهت واسنجی مدل های ساخته شده از الگوریتم اجتماع ذرات استفاده گردید. با توجه به یکسان فرض نمودن هدایت هیدرولیکی کل منطقه، در نتیجه واسنجی مدل جریان المان تحلیلی با توجه به آمار فروردین ماه ۱۳۸۹، مقدار ضریب هدایت هیدرولیکی $12/75$

References

- 1- Bakker, M., Anderson, E., Olsthoorn, T., and Strack, O.D.L., 1999. Regional groundwater modeling of the Yucca Mountain site using analytic elements. *Journal of Hydrology*, 226(3), pp.167-178.
- 2- Bakker, M. and Kelson, V.A., 2009. Writing analytic element programs in Python. *Ground Water*. 47(6), pp.828-834.

- 3- Craig, J.R., 2004. Reactive contaminant transport modeling using analytic element flow solutions. PhD Thesis. *The State University of New York, Buffalo, USA*.
- 4- Fitts, C.R., 2012. *Groundwater Science*. 2^{ed} Ed. Academic Press, Oxford.
- 5- Janković I. and Barnes, R., 1999. High-order line elements in modeling two-dimensional groundwater flow. *Journal of Hydrology*, 226(3), pp. 211-223.
- 6- Kansa E.J., 1990. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8), pp. 147-161.
- 7- Khorramdel, G.N., Mohammadi, K. and Monem, M.J., 2008. Optimization of observation well network for estimation of groundwater balance using double water table fluctuation method. *Journal of Water and Soil*, 22(2), pp.358-370 (In Persian).
- 8- Liu, G.R. and Gu, Y.T., 2005. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer, Dordrecht.
- 9- Mirmoshtaghi, M., Amirnejad, R. and Khaledian, M.R., 2012. Evaluating of water quality of Sefid-Rood and zoning by water quality index NSFQI and OWQI. *Journal of Wetland Ecobiology*, 3(9), pp.23-34 (In Persian).
- 10- Meenal, M. and Eldho, T.I.; 2011. Simulation of groundwater flow in unconfined aquifer using meshfree point collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(4), pp. 700-707.
- 11- Meenal M. and T.L. Eldho, T.L., 2012. Two-dimensional contaminant transport modeling using meshfree point collocation method (PCM). *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(4), pp. 551-561.
- 12- Pathania T. and Rastogi, A.K., 2017. Groundwater flow simulation in confined aquifer by meshless element free Galerkin method. *European Water*, 57, pp. 505-512.
- 13- Pokrajac, D. and Lazic, R., 2002. An efficient algorithm for high accuracy particle tracking in finite elements. *Advances in Water Resources*. 25(4), pp.353-369.
- 14- Rabideau, A.J.; Craig, J.R., Silavisesrith, W., Fredrick, K., Flewelling, D.M., Janković, I., Becker, M.W., Bandilla, K. and Matott, L.S., 2007. Analytic-element modeling of supraregional groundwater flow: Concepts and tools for automated model configuration. *Journal of Hydrologic Engineering (ASCE)*, 12(1), pp. 83-96.
- 15- Ranjram, M. and Craig, J.R., 2018. Closed analytic elements with flexible geometry. *Groundwater*, 56(5), pp.816-22.
- 16- Saatsaz, M., 2012. Groundwater resource assessment of Astaneh-Kouchesfahan plain, PhD Thesis, *University Putra Malaysia*, Serdang, Malaysia.
- 17- Saatsaz, M., Sulaiman, W.N.A., Eslamian, S. and Javadi, S., 2013. Development of a coupled flow and solute transport modelling for Astaneh–Kouchesfahan groundwater resources, North of Iran. *International Journal of Water*, 7(1), pp. 80-103.
- 18- Strack, O.D.L.; Fitts, C. and Zaadnoordijk, W., 1987. Application and demonstration of analytic element models. *NWWA Conference on Solving Ground Water Problems with Models*, Ohio, USA, pp.1464-1474.
- 19- Strack, O.D.L., 2009. The generating analytic element approach with application to the modified Helmholtz equation. *Journal of Engineering Mathematics*, 64(2), pp.163-191.

-
- 20- Wang, H.F. and Anderson, M.P., 1995. *Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*. Academic Press, San Francisco.